Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2024/2025

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 16 luglio 2025

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x(1-x)^{3/2} - 2x + e^x \cos 2x - \cos 2x}{(\cos x - \cos 2x)(1-\sqrt{1-x})}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-x^2)^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2 - x^3} + 2x\sqrt{x+1}}$

c) $\lim_{n\to+\infty} n\left(e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}(x^2+1) + (x-1)\big(3\log(1+x) + \cos 2x\big)}{\log\big(1 + x\sqrt{x^3+x^2}\big)}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n^3}}{e^{2n^2-n}}$

f) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(3n+1)!}{(n!)^2}}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} 2x}{x \arctan(1/x)}$

h) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := x^2 - \log\left|\dfrac{5-5x}{3x+5}\right|$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', crescenza/decrescenza, punti di massimo/minimo, mostrando che la funzione si annulla in due punti; **c)** f'', mostrando che ci sono due flessi, uno dei quali in $x = -1$; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 2x}{x^2 - 6x + 10}$, (b) $\dfrac{4\tan x}{(\cos^2 x)\sqrt{1 - 4\tan^2 x}}$, (c) $\dfrac{e^{2+\log^2 x}\log x}{x}$, (d) $(4x^3 + x)e^{-x^2}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{2x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x-1}$.

5. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

(a) $\log(1-x^2) - \cos(e^x - 1)$ di ordine 3, (b) $(e^{x^2} - 1)(1 + \operatorname{sen}(x^2))$ di ordine 6.

6. Risolvere le equazioni seguenti:

(a) $z^2 - i\Im(iz) + 2\Re(z) = 2$, (b) $z^2 - 2z\cdot\overline{z} - \Im(z) = 0$.

7. Trovare i punti stazionari della funzione $g(x,y) := \dfrac{x(x+y)}{6x+y-3}$ e indagare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 4+4, 4+4, 6.