Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 25 giugno 2025

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{2x} - 2(1-x)^{3/2} - 6x\cos x}{x - \sqrt{x^2 - x^3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(3x+1)\cos x - e^{-2x}\tan x}{|x^2 - x| + x}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n-2n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\operatorname{sen} x\cos x - e^{-x}(x^2+1) - \log(1-x^2)}{\sqrt{1-\cos(x^3)}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\arccos\frac{\sqrt{x^2-x^4}}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n + \frac{1}{e^{-1/n}-1}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n}\binom{3n}{n}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$

2. Data la funzione $f(x) := \arctan\dfrac{2x^2}{\sqrt{5}(x+2)}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **c)** f'', mostrando che ci sono tre flessi, fra cui in $x=-1$; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x+6}{x^3-x^2+3x+5},\ \text{(b)}\ \frac{\tan x}{1+\log^2(\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{2\log x}{(2+\log^2 x)x},\ \text{(d)}\ x\cos(\log x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

5. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \tan(1-e^x) + \operatorname{sen}(x^2)\ \text{di ordine 3},\qquad \text{(b)}\ \frac{2\log(1+x^3)-x^2}{1-2x^3}\ \text{di ordine 5.}$$

6. Risolvere le equazioni seguenti:

$$\text{(a)}\quad 3\cdot\overline{z+i} + \Im(z) - 15\Re(z) = 2 \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} z\cdot\overline{2iw} = 2w \\ 1+iz = w^2 \end{cases}$$

7. Data la funzione $g(x,y) := x^4 - 4xy + 2y^2 - 4\log|x-y|$, trovare i punti stazionari e indagare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 4+4, 4+4, 6.