Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2024/2025

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Compitino del 13 giugno 2025

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)\cos 2x - e^x \operatorname{sen} x}{|x^3+x|+x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + 2\operatorname{sen} x - 7x^2 - 6x\sqrt{1-x} - 2}{x - \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x - 2x^4 + 2(1+x^2)\arctan x - 3\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{x^2-x^3}(\cos x - \cos 2x)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \frac{2n^2+n}{2} \right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos\big(\exp(-x^2)\big)}{x}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n)!}}$

2. Data la funzione $f(x) := 1 - 2x - 4x^2 - \dfrac{1}{2x+1}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno, limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) := \dfrac{4x}{3} + \log\left|\dfrac{x-3}{3x+3}\right|$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$, trovando gli intervalli di crescenza/decresenza ed eventuali punti di massimo/minimo locale; **c)** mostrare che la funzione si annulla in esattamente quattro punti, uno dei quali l'origine; **d)** calcolare $g''(x)$, trovando gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi; **e)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^4-3}{4x^3+4x^2+x}$ (b) $\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\big(x-\log(x^2)\big)^2}$ (c) $x^3\cos(\log x)$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+3-2\sqrt{2x^2+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{2x^2+1}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{n^2}, $n!$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $1/\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, e^{-n}, $\sqrt{n^5+2n+1}$, 2^n, $(n!)^{-n}$, $1/n^n$.

7. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

(a) $\tan(1-e^x) - \operatorname{sen}(x^2)$ di ordine 3, (b) $(e^{x^2}-2x^3)(1-\cos 2x)$ di ordine 4.

8. Svolgendo i calcoli, determina il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ di $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Qual è il resto nel caso del polinomio di Taylor di ordine 4?

Punti: 4 per ogni limite, 10, 12, 5+4+4, 7, 7, 4+4, 5.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Compitino del 13 giugno 2025

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)\cos 2x - e^x \operatorname{sen} x}{|x^3+x|+x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + 2\operatorname{sen} x - 7x^2 - 6x\sqrt{1-x} - 2}{x - \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x - 2x^4 + 2(1+x^2)\arctan x - 3\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{x^2-x^3}(\cos x - \cos 2x)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \frac{2n^2+n}{2} \right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos\big(\exp(-x^2)\big)}{x}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n)!}}$

2. Data la funzione $f(x) := 1 - 2x - 4x^2 - \dfrac{1}{2x+1}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno, limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) := \dfrac{4x}{3} + \log\left|\dfrac{x-3}{3x+3}\right|$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$, trovando gli intervalli di crescenza/decresenza ed eventuali punti di massimo/minimo locale; **c)** mostrare che la funzione si annulla in esattamente quattro punti, uno dei quali l'origine; **d)** calcolare $g''(x)$, trovando gli intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi; **e)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^4-3}{4x^3+4x^2+x}$ (b) $\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\big(x-\log(x^2)\big)^2}$ (c) $x^3\cos(\log x)$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+3-2\sqrt{2x^2+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x^2+1}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{n^2}, $n!$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $1/\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, e^{-n}, $\sqrt{n^5+2n+1}$, 2^n, $(n!)^{-n}$, $1/n^n$.

7. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

(a) $\tan(1-e^x) - \operatorname{sen}(x^2)$ di ordine 3, (b) $(e^{x^2} - 2x^3)(1-\cos 2x)$ di ordine 4.

8. Svolgendo i calcoli, determina il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ di $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Qual è il resto nel caso del polinomio di Taylor di ordine 4?

Punti: 4 per ogni limite, 10, 12, 5+4+4, 7, 7, 4+4, 5.