Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2023/2024

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 16 settembre 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3e^{2x} + 4(1-x)^{3/2} + 11(x-1)x \operatorname{sen} x - 7\cos x}{(\cos x - \cos 3x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x^2)^{-1/x}}{\sqrt{2x^3+x^2} - x\sqrt{x+1}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(x^2+1)e^{-x} + (2x+1)\log(1+2x) + 2(x-2)\cos x}{\log\big(2-\sqrt{1-x^2}\big)}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n+1)!}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3} e^{2n^2+2n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x/2)}{x\arctan(2/x)}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := x + \log\left|\dfrac{x^2-7}{14x+7}\right|$, trovare **a)** dominio, continuità, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', derivabilità, crescenza/decrescenza, punti di massimo/minimo, mostrando che la f si annulla in tre punti; **c)** f'', mostrando che esistono due flessi; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^3+6x^2+3x}{x^2+6x+10}$, (b) $\dfrac{4\log(x+1)}{(x+1)\sqrt{1-4\log^2(x+1)}}$, (c) $\dfrac{e^{1+2\log^2 x}\log x}{x}$, (d) $(x-2x^3)e^{-2x^2}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2x-3)\sqrt{2-x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2-x}$.

5. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

(a) $(\operatorname{sen} x)\log(1+x^2)$ di ordine 5, (b) $(e^{x^2}-1)(1+\operatorname{sen}(x^2))$ di ordine 3

6. Risolvere le equazioni seguenti:

(a) $\begin{cases} \overline{z} - w = 3z + 2 \\ w + i\cdot\Re(z) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z^2 - w^2 = 1 + 5i \\ z + \overline{w} = 2 + i \end{cases}$ (c) $|z| - \overline{z} = 2 - i$

7. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) := x^2 + 4xy - 4x + 4\log\left|\dfrac{x+1}{xy+1}\right|$ e determinare, se possibile, se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 4+4, 4+4+4, 6.