Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2023/2024

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 3 settembre 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{19(x^2-x)\operatorname{sen} x + 8(1+x)^{3/2} + 12e^{-x} - 20\cos x}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)(\cos x - \cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3} \Big/ e^{2n^2-n}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{1/x}-1}{\sqrt{x^2-x^3}-2x\sqrt{1+x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}(x^2+1)+(1-x)\log(1-x)+(3x-1)\cos x}{\log\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)!}{(n!)^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)}{x\arctan(1/x)}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \arctan\sqrt{\dfrac{2|x|}{x^2+1}}$, trovare **a)** dominio, continuità, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', derivabilità, crescenza/decrescenza, punti di massimo/minimo e segno di f; **c)** f'', mostrando che esistono almeno due flessi; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^3-6x^2+1}{x^2+6x+10}$, (b) $\dfrac{4\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4\operatorname{arcsen}^2 x}}$, (c) $\dfrac{e^{1-2\log^2 x}\log x}{x}$, (d) $(2x^3+x)e^{-2x^2}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2x+1)\sqrt{1-2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{1-2x}$.

5. Svolgendo i calcoli, determina il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ di $x^4-2x^3-x^2+3x+5$. Qual è il resto nel caso del polinomio di Taylor di ordine 4?

6. Risolvere le equazioni seguenti:

(a) $\begin{cases} z+2\overline{w} = 1+i \\ 3z-\Im(w) = 2-i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} w\cdot\Re(z) = 1-i \\ \Im(z)+3w = i-1 \end{cases}$ (c) $z\cdot\overline{z}+\dfrac{z}{2} = 4+i$

7. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) := (x-y)^2 - 2\log|1+2xy|$ e determinare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 4+4+4, 6.