Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2023/2024

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 25 luglio 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{16(x+1)^{3/2} + 11x(x+2)\operatorname{sen} x + 8(\cos 2x - 3e^x)}{\big(1-\sqrt{1-x}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2 - x^3} - 2x\sqrt{x+1}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2-n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-2n^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)e^{2x} - 3(x+1)\log(x+1) + (x-1)\cos 2x}{\log\big(2-\sqrt{x^2+1}\big)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} 2x}{x\arctan(1/x)}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(e\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n - 1\right)$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n)!}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := 2x + 3\log\left|\dfrac{2x+1}{2x^2+1}\right|$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', crescenza/decrescenza, punti di massimo/minimo e segno di f; **c)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^3-6x^2+2x}{x^2-6x+10},\ \text{(b)}\ \frac{4\tan x}{(\cos^2 x)\sqrt{1-4\tan^2 x}},\ \text{(c)}\ \frac{e^{2+\log^2 x}\log x}{x},\ \text{(d)}\ (x-3x^3)e^{-x^2}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{2x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x-1}$.

5. Svolgendo i calcoli, determina il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ di $x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x + 5$. Qual è il resto nel caso del polinomio di Taylor di ordine 4?

6. Risolvere le equazioni seguenti:

$$\text{(a)}\quad i\Im(z) - 2\Re(z) + z^2 = 1 \qquad \text{(b)}\quad z^2 - 2\overline{z} - \Im(z) = 1$$

7. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) := xy + \log|1-3y+xy|$ e determinare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 4+4, 6.