Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2023/2024

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta dell'11 luglio 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^{2x}-2e^x)+2(1+x)^{3/2}-2\cos x}{x-\sqrt{x^2-x^3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1/3}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-3x^2)\cos x - e^{-2x}\tan x}{|x^2-x|+x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^2)-e^{-x}(x^2+1)+\cos x-\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{1-\cos(x^3)}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\arccos\frac{\sqrt{x^2-x^4}}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n^2-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n^3}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)!}{(n!)^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n^2)!}{n^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := x\sqrt{\left|\dfrac{x}{3x^2-1}\right|}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **c)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x+3}{(x^2-2x+2)(x-1)},\ \text{(b)}\ \frac{3\tan x}{1+\log^2(\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{4+\tan x},\ \text{(d)}\ (x-2)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-2\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \log(1+x^2)-\cos(e^x-1)\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ (e^{x^2}-1)(1+\operatorname{sen}(x^2))\ \text{di ordine 6}.$$

6. Risolvere le equazioni seguenti:

$$\text{(a)}\quad 3\overline{z}+\Im(z)-15\Re(z)\cdot i=2 \qquad \text{(b)}\quad 2|z|^2-(z-2)\cdot i=9$$

7. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) := x^2-y^2-\log(2+2x^2-y^2)$ e determinare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 4+4, 4+4, 6.