Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 24 giugno 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} 2x - 2x^2 - 3x\sqrt{1-x}}{x + \sqrt{e^{x^2/2} - \cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2 - x)\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} 2x}{|x^3 - x| + x}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n-2n^2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x - x^2 - e^x) + (1 + x^2)\arctan x}{\sqrt{x^2 - x^3}(\cos x - \cos 2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \arccos \frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(n + \frac{1}{e^{-1/n} - 1}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{3^n}\binom{3n}{n}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$

2. Data la funzione $g(x) := \arctan\left(\dfrac{3x}{3x^2 - 1}\right)$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **c)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4 - 2x - 1}{x^2 - 2x - 1}, \ \text{(b) } \frac{\tan x}{1 + \log^2(\cos x)}, \ \text{(c) } \frac{2\log x}{(2 + \log^2 x)x}, \ \text{(d) } x\cos(\log x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq (4/e)n^n$. Possono essere utili le proprietà note della successione fondamentale $(1 + 1/n)^{n+1}$.

6. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } \tan(1 - e^x) + \operatorname{sen}(x^2) \text{ di ordine 3}, \quad \text{(b) } \frac{\log(1 + x^3) - \frac{x^2}{2}}{1 - 2x^3} \text{ di ordine 5}.$$

7. Risolvere le equazioni seguenti:

$$\text{(a)} \quad |z|^2 - \big(6 - \Im(z)\big)z - 1 = -8i \qquad \text{(b)} \quad |z|^2\Re(z) + 2z + 6i = 0$$

8. Data la funzione $f(x, y) := x^2 - x + 4y^4 + 16y^3 + 20y^2 + 6y$, mostrare che i punti $(1/2, -3/2)$, $(1/2, (-3 \pm \sqrt{5})/4)$ sono i soli punti stazionari, e determinare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 4+4, 4+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2023/2024

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Prova Scritta del 24 giugno 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} 2x - 2x^2 - 3x\sqrt{1-x}}{x + \sqrt{e^{x^2/2} - \cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2 - x)\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} 2x}{|x^3 - x| + x}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n-2n^2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x - x^2 - e^x) + (1 + x^2)\arctan x}{\sqrt{x^2 - x^3}(\cos x - \cos 2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\arccos\frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(n + \frac{1}{e^{-1/n} - 1}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{3^n}\binom{3n}{n}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$

2. Data la funzione $g(x) := \arctan\left(\dfrac{3x}{3x^2 - 1}\right)$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti; **b)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **c)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **d)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4 - 2x - 1}{x^2 - 2x - 1},\quad \text{(b)}\ \frac{\tan x}{1 + \log^2(\cos x)},\quad \text{(c)}\ \frac{2\log x}{(2 + \log^2 x)x},\quad \text{(d)}\ x\cos(\log x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq (4/e)n^n$. Possono essere utili le proprietà note della successione fondamentale $(1 + 1/n)^{n+1}$.

6. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \tan(1 - e^x) + \operatorname{sen}(x^2)\ \text{di ordine 3},\qquad \text{(b)}\ \frac{\log(1 + x^3) - \frac{x^2}{2}}{1 - 2x^3}\ \text{di ordine 5.}$$

7. Risolvere le equazioni seguenti:

$$\text{(a)}\quad |z|^2 - \big(6 - \Im(z)\big)z - 1 = -8i \qquad \text{(b)}\quad |z|^2\Re(z) + 2z + 6i = 0$$

8. Data la funzione $f(x,y) := x^2 - x + 4y^4 + 16y^3 + 20y^2 + 6y$, mostrare che i punti $(1/2, -3/2)$, $(1/2, (-3 \pm \sqrt{5})/4)$ sono i soli punti stazionari, e determinare se sono massimi, minimi o selle.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 4+4, 4+4, 6.