Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Analisi Matematica

Compitino del 14 giugno 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{2n^3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x + x(x-1)\cos 2x}{x-|x^3+x|}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2-3x\sqrt{x+1}+e^{-x}+2\operatorname{sen}2x-1}{\sqrt{e^{-x^2}-\cos 2x}+x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1+x^2)\arctan x - x\cos x}{(\cos x-\cos 2x)\sqrt{x^3+x^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n+\frac{1}{\log\big(1-\frac{1}{n}\big)}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2(x-2)}{x^2-2x+1}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) := \arctan\Big(\dfrac{x^2}{\sqrt{2}(x+1)}\Big)$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, segno, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$ dove esiste; **d)** calcolare $g''(x)$ dove esiste, mostrando che il grafico ha almeno tre flessi; **e)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^4-2}{x^2-x-2}$ (b) $\dfrac{2x(1+\tan^2 x)+2\tan x}{1+4x^2\tan^2 x}$ (c) $(e^{-x}+e^x)(\operatorname{sen} x+\cos x)$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{2}{2x-3x^3+x^3\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 3^{n^2}, $n!$, $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $1-e^{1/n}$, $\sqrt{n^3+2n+1}$, 2^{n^3}, $\sqrt[n]{n^2+1}$, n^{-n}.

7. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determinare il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni:

(a) $\tan(e^x-1)-\operatorname{sen}(x^2)$ di ordine 3, (b) $(2x^3+e^{x^2})\big(\cos(x\sqrt{x})-1\big)$ di ordine 4.

8. Svolgendo i calcoli, determina il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0=1$ di $x^4-x^3-2x^2+4x+5$. Qual è il resto nel caso del polinomio di Taylor di ordine 4? .

Punti: 5 per ogni limite, 10, 12, 5+4+4, 7, 7, 4+4, 5.