Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2023/2024

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 15 febbraio 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x(e^x+1)^2 - 8\cos(x-x^2) + 8(1-x)^{3/2}}{x - |x^3+x|}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2\cos x - 2x\sqrt{x+1} + 2e^x(x-1)^2 \operatorname{sen} x}{x^2(x-\sqrt{x^2-x^3})}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{24\sqrt{1-x} - 5x^2(x-3) + 12x(\cos x - \operatorname{sen} x) - 24}{(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)^3(\sqrt{e^x} - \arctan 2x)}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(x\log\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right) - x\log\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}\right)\right)$

e) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^{2n}}{n!}}$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arccos(\cos x)}{\cos(\arccos x)}$

g) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n^3}}{e^{2n^2-n}}$

h) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{((n-1)!)^2}{(n-1)^{n-1}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x-3}{x-1}\sqrt{|4x-3|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-x^3+2}{(x-2)(x^2+2x+2)}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\frac{2}{x}}{1+(x+2\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2+1)\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x+x^2\sqrt{2-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt[n]{2^n+n}$, $\arccos(n/(n+1))$, e^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\ge 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{e^{n+1}}{(e-1)n} < \dfrac{e}{1} + \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{e^3}{3} + \cdots + \dfrac{e^n}{n} < \dfrac{e^{n+1}}{(e-2)n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 15 febbraio 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x(\cos 2x - \operatorname{sen} x) - x^2(3x-1) + 2 - 2\sqrt{2x+1}}{\left(e^{2x} + \sqrt{1+\tan x}\right)(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)^3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\cos(x-x^2) - 6(1+x)^{3/2} + x(2+e^x)^2}{x - |x-x^3|}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x - 2x\sqrt{1-x} + 2e^x(x-1)^2 \operatorname{sen} x}{x^2\left(x - \sqrt{x^2-x^3}\right)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) - \log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x}\right)\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3} e^{2n^2+2n}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{((n+1)!)^2}{n^{n+1}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n+2}}{(n+1)!}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\arccos(\cos x)}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+1}{3x+1}\sqrt{|4x+1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

(a) $\dfrac{x^4+x^3+2}{(x+2)(x^2-2x+2)}$, (b) $\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+(2x+\log x)^2}$, (c) $\dfrac{4\log x}{x(1-2\log^2 x)}$

(d) $(2x^2+1)\log^2 x$, (e) $\dfrac{1+\tan^2(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x+4x^2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 4}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{-n}, $\sqrt[n]{n+2^n}$, $\arccos(n/(n+1))$, n^{2n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, $(2n)!$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{\pi^{n+1}}{(\pi-1)n} < \dfrac{\pi}{1} + \dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{3} + \cdots + \dfrac{\pi^n}{n} < \dfrac{\pi^{n+1}}{(\pi-2)n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 15 febbraio 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8\sqrt{1-x} - 3(x-3)x^2 - 4(2x - \cos x)\operatorname{sen} x - 8}{(\operatorname{sen} 2x - 3\operatorname{sen} x)^3(e^x - \sqrt{2 - \tan 2x})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x+1}\right) - \log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}\right)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5x^2\cos x + 2x\sqrt{1+x} - e^x(x+1)^2 \operatorname{sen} 2x}{x^3 - \sqrt{x^6 - x^7}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(1+e^{-x})^2 + 8\cos(x^2+x) - 8(x+1)^{3/2}}{|x^3+x| + x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\cos x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{e^{2n^2-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n^{2n+2}}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{n+1}}{((n+1)!)^2}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x-1}{3x-1}\sqrt{|4x-1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{(x+2)(x^2-2x+2)}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + (x - 2\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2 - \log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (2 - x^2)\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1 + \tan^2(\arccos 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x - 4x^2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 4}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt[n]{2^n - n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt{n^4 - 2n + 1}$, 2^{-n^2}, e^{-n}, n^{2n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{2^{n+1}}{n} \leq \dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^3}{3} + \cdots + \dfrac{2^n}{n} < \dfrac{3\cdot 2^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 15 febbraio 2024

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^{-x}+2)^2 - 6\cos(x^2+x) + 6(1-x)^{3/2}}{x+|x-x^3|}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x+1}\right) - x\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}\right)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{7x^2\cos x + 2x\sqrt{x+1} - 2e^{2x}(x+1)^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^6-x^7}-x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8\sqrt{x+1} - (2x-1)x^2 - 2(1+\cos x)\operatorname{sen} x - 8}{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)^2(\sqrt{e^x}-\cos 2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arccos x)}{\arccos(\cos x)}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{2n}}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+3}{x+1}\sqrt{|4x+3|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+x^3+3}{(x-2)(x^2+2x+2)}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{2-\frac{1}{x}}{1+(2x-\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{4\log x}{x(1+2\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2-1)\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-x^2}-x}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 2^{-n^2}, $\sqrt[n]{2^n-n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, n^{2n}, e^{-n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{3^{n+1}}{2n} < \dfrac{3}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^3}{3} + \cdots + \dfrac{3^n}{n} < \dfrac{2\cdot 3^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.