Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 26 luglio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)x\cos 2x + 2e^{-x}\tan x}{|x^3-x|\cdot x + x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})} - \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x^3 + 8\sqrt{x+1} - 2(\cos x + 1)\operatorname{sen} x - 8}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)(\cos x - \cos 2x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x\sqrt{1-x} - (2-x^2)\operatorname{sen} 2x - 4e^{-x}\operatorname{sen} x}{x + \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1-|x|)}{\sqrt{\sqrt{1-\cos x}}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3} e^{2n^2+n}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := (x+1)\log\left|1-x^2\right|$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, mostrando che $f'(0) = 0$ e che $f'(x)$ si annulla in almeno altri due punti (si può usare il teorema di Rolle); **c)** trovare i limiti agli estremi di $f'(x)$; **e)** calcolare $f''(x)$, e trovare gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **f)** mostrare che $f'(x)$ si annulla in esattamente tre punti e, in termini di questi, trovare gli intervalli di crescenza/decrescenza di f; **g)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+x^3+3}{(x-2)(x^2+2x+2)}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{2+\frac{1}{x}}{1+(2x+\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-x^2}-x}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt[n]{3^n-2^n}$, $\arccos(n/(n+1))$, e^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1+\dfrac{\log n}{\log 4} \leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} \leq 1+\log n$.

Punti: 4 per ogni limite, 12, 4+3+2+4, 6, 6, 6.