Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta dell'11 luglio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(2-x^2)\operatorname{sen}2x-8x\sqrt{1-x}+4e^{-x}\operatorname{sen}x}{x-\sqrt{e^{-x^2}-\cos 2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{8x(\cos x-\operatorname{sen}x)+5(2x^2-x^3)-16(1-\sqrt{1-x})}{(e^x-1)(\cos x-\cos 2x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(x-2)x\cos 2x+2e^{-x}\tan x}{|x^3-x|\cdot x+x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arccos(1-|x|)}{\sqrt{\sqrt{\log(1+x^2)}}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^2}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n^2-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x):=\dfrac{2x+3}{x+1}\sqrt{|x^2-2x-3|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-2x^3+1}{x^3-2x+4},\qquad \text{(b)}\quad \frac{2+\frac{1}{x}}{1+(2x+\log x)^2},\qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{1}{x+4x^2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-4}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt[n]{2^n+n}$, $\arccos(n/(n+1))$, e^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq1$ vale la disuguaglianza $1+\frac{1}{2}\log n\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq 1+2\log n$.

Punti: 4 per ogni limite, 12, 4+3+2+4, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta dell'11 luglio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x^3-8-2(1+\cos x)\operatorname{sen} x+8\sqrt{x+1}}{(\cos x-\cos 2x)\log(1+x)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}-\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\tan x - x(1-2x)\cos 2x}{x^2 - x\cdot|x^3-x|}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(2-x^2)\operatorname{sen} x - 4x\sqrt{x+1} - e^{-x}\operatorname{sen} 2x}{x+\sqrt{e^{-x^2}-\cos 2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n)!}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{(2n)!}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\operatorname{sgn}(x)-x)}{\sqrt{\sqrt{\log(1+x^2)}}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{2x-3}{x-1}\sqrt{|3-2x-x^2|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-x^3+2}{x^3-2x-4},\qquad \text{(b)}\quad \frac{1-\frac{2}{x}}{1+(x-2\log x)^2},\qquad \text{(c)}\quad \frac{4\log x}{x(1+2\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (2-x^2)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x-4x^2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-4}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{-n}, $\sqrt[n]{n+2^n}$, $\arccos(n/(n+1))$, n^{2n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, $(2n)!$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la disuguaglianza $1+\frac{1}{3}\log n \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq 1+\log n$.

Punti: 4 per ogni limite, 12, 4+3+2+4, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta dell'11 luglio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{9x^2 - 3x^3 - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8(1-\sqrt{1+x})}{(\cos x - \cos 2x)\operatorname{sen}(x - x^2)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})} - \frac{1}{e^{1/n}-1}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(2-x)\cos x - 2e^{-2x}\tan x}{x^2 - x\cdot|x^3 - x|}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x\sqrt{1-x} - (2-x^2)\operatorname{sen} 2x - 4e^{-x}\operatorname{sen} x}{x + \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}{e^{2n^2-n}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos\big(\operatorname{sgn}(x) - x\big)}{\sqrt{\sqrt{1-\cos x}}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)!}{(n!)^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x-2}{x-1}\sqrt{|x^2+4x-4|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+2x^3-3}{x^3-2x-4}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\frac{2}{x}}{1+(x+2\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{4\log x}{x(1-2\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (2x^2+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-x^2}-x}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt[n]{2^n - n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, e^{-n}, n^{2n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1 + \frac{1}{3}\log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + 2\log n$.

Punti: 4 per ogni limite, 12, 4+3+2+4, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta dell'11 luglio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\operatorname{sen} 2x - 3(2-x^2)\operatorname{sen} x + 4x\sqrt{1+x}}{x + \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}\tan 2x + x(3x-2)\cos 2x}{x\cdot|x^3 - x| + x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2(1-\sqrt{1+2x}) + 9x^3 - 2x(\cos 2x + \operatorname{sen} x)}{(\cos 2x - \cos x)(1-e^x)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-1/n}} - \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3} e^{2n^2+2n}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1-|x|)}{\sqrt{\sqrt{1-\cos x}}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n+1)!}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+2}{x+1}\sqrt{|x^2-4x-4|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+x^3+2}{x^3-2x+4}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{2-\frac{1}{x}}{1+(2x-\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2-\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2-1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x+x^2\sqrt{2-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 2^{-n^2}, $\sqrt[n]{2^n-n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, n^{2n}, e^{-n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la disuguaglianza $1+\frac{1}{2}\log n \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq 1+\log n$.

Punti: 4 per ogni limite, 12, 4+3+2+4, 6, 6, 6.