Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 24 giugno 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}-\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3(2-x^2)\operatorname{sen}x-4x\sqrt{x+1}-e^{-x}\operatorname{sen}2x}{x+\sqrt{e^{-x^2}-\cos2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x^3-8-2(1+\cos x)\operatorname{sen}x+8\sqrt{x+1}}{(\cos x-\cos2x)\log(1+x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\tan x-x(1-3x)\cos2x}{x-|x^3+x|}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arccos(1-|x|)}{\sqrt{\sqrt{1-\cos x}}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^2}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n^2-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x):=x^2+8x+8+\dfrac{8}{x-1}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x):=(1-x)\arctan\dfrac{2}{|\pi x-2|}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$ dove esiste, mostrando che si annulla per $x=0$; **d)** calcolare $g''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** sfruttando quanto trovato su $g''(x)$, mostrare che $g'(x)$ si annulla soltanto per $x=0$ e determinarne quindi il segno; **f)** si può estendere la g a una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ in modo che risulti continua e derivabile? **g)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad\frac{x^4+x-3}{x^3+x^2-2x},\qquad\text{(b)}\quad\frac{3+\tan^2x}{1+(2x+\tan x)^2},\qquad\text{(c)}\quad\frac{2\log x}{x(2+\log^2x)}$$

$$\text{(d)}\quad(e^{-x}+e^x)(\operatorname{sen}x-\cos x)$$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{1}{3x^3-2x+x^3\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 3^{n^2}, $n!$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $1-e^{1/n}$, $\sqrt{n^3+2n+1}$, 2^{n^3}, $\sqrt[n]{n^2+1}$, n^{-n}.

Punti: 4 per ogni limite, 9, 10, 4+3+3+4, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 24 giugno 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2(1-\sqrt{1+2x}) + 9x^3 - 2x(\cos 2x + \operatorname{sen} x)}{(\cos 2x - \cos x)(1-e^x)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-1/n}} - \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(2-3x)\cos 2x - e^x \tan 2x}{x - |x^3 - x|}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\operatorname{sen} 2x - 3(2-x^2)\operatorname{sen} x + 4x\sqrt{1+x}}{x + \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1-|x|)}{\sqrt{\sqrt{\log(1+x^2)}}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n)!}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}{e^{2n^2-n}}$

2. Data la funzione $f(x) := 4x^2 + 2x - 1 + \dfrac{1}{2x+1}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) := (x+1)\arctan\dfrac{2}{|2+\pi x|}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$ dove esiste, mostrando che si annulla per $x = 0$; **d)** calcolare $g''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** sfruttando quanto trovato su $g''(x)$, mostrare che $g'(x)$ si annulla soltanto per $x = 0$ e determinarne quindi il segno; **f)** si può estendere la g a una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ in modo che risulti continua e derivabile? **g)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^4-3}{x^3+3x^2+2x}$, (b) $\dfrac{2x(1+\tan^2 x) + 2\tan x}{1+4x^2\tan^2 x}$, (c) $\dfrac{4\log(x)}{x(1-2\log^2(x))}$

(d) $(e^{-x} - e^x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x - 4x^3 + x^3\sqrt{\frac{1}{x^2} - 2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 2}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: n^{-n}, $\sqrt[n]{n^2+1}$, 3^{n^2}, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, 2^{n^3}, $1 - e^{1/n}$, $\sqrt{n^3+2n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $n!$.

Punti: 4 per ogni limite, 9, 10, 4+3+3+4, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 24 giugno 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x(\cos x - \operatorname{sen} x) + 5(2x^2 - x^3) - 16(1-\sqrt{1-x})}{(e^x-1)(\cos x - \cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})} - \frac{1}{e^{1/n}-1}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3-x)x\cos 2x - 3e^{-x}\tan x}{x - |x^3 - x|}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8x\sqrt{1-x} - (2-x^2)\operatorname{sen} 2x - 4e^{-x}\operatorname{sen} x}{x + \sqrt{\exp(-x^2) - \cos 2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\operatorname{sgn}(x) - x)}{\sqrt{\sqrt{\log(1+x^2)}}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)!}{(n!)^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := 4x^2 - 2x - 1 + \dfrac{1}{1-2x}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) := (1+2x)\arctan\dfrac{1}{|x\pi+1|}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$ dove esiste, mostrando che si annulla per $x=0$; **d)** calcolare $g''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** sfruttando quanto trovato su $g''(x)$, mostrare che $g'(x)$ si annulla soltanto per $x=0$ e determinarne quindi il segno; **f)** si può estendere la g a una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ in modo che risulti continua e derivabile? **g)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-2}{x^3-x^2-2x}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1-\tan^2 x}{1+(2x-\tan x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2-\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (e^x - e^{-x})(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{2}{2x - 3x^3 + x^3\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\frac{2}{x^2}-1}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt[n]{n^2+1}$, $1-e^{1/n}$, $n!$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt{n^3+2n+1}$, n^{-n}, 2^{n^3}, 3^{n^2}.

Punti: 4 per ogni limite, 9, 10, 4+3+3+4, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 24 giugno 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2-x^2)\operatorname{sen} 2x - 8x\sqrt{1-x} + 4e^{-x}\operatorname{sen} x}{x - \sqrt{e^{-x^2} - \cos 2x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-3x^2)\cos x - e^{-2x}\tan x}{|x^3+x| + x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{9x^2 - 3x^3 - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8(1-\sqrt{1+x})}{(\cos x - \cos 2x)\operatorname{sen}(x-x^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3} e^{2n^2+2n}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos\big(\operatorname{sgn}(x) - x\big)}{\sqrt{\sqrt{1-\cos x}}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(3n+1)!}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := x^2 - 8x + 8 - \dfrac{8}{x+1}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) := (1-2x)\arctan\dfrac{1}{|1-x\pi|}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $g'(x)$ dove esiste, mostrando che si annulla per $x=0$; **d)** calcolare $g''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** sfruttando quanto trovato su $g''(x)$, mostrare che $g'(x)$ si annulla soltanto per $x=0$ e determinarne quindi il segno; **f)** si può estendere la g a una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ in modo che risulti continua e derivabile? **g)** tracciare un grafico qualitativo di g.

4. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+2}{x^3-3x^2+2x}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1-\tan^2 x}{1+(2x-\tan x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{4\log x}{x(1+2\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (e^{-x}+e^{x})(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x - 4x^3 - x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}-2}$.

6. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt{n^3+2n+1}$, $\sqrt[n]{n^2+1}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $n!$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $1-e^{1/n}$, 3^{n^2}, n^{-n}, 2^{n^3}.

Punti: 4 per ogni limite, 9, 10, 4+3+3+4, 6, 6, 6.