Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 9 febbraio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x^2+2x)^2+x}-\sqrt{x^2+x}\sqrt{x^2+3x}\right)$

b) $\lim_{x\to1}\dfrac{\cos 2x-1}{(x^3+x^2-5x+3)\big(1-\sqrt{x}\big)}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-5x^3)(2x-x^4+2x^3)}{(4x-1)(2+x^3-3x^2)}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-2x^6+(x^2-2)(2x^4-3x^3)}{x^5(2x-1)+(x^2+3)(x^3-2x^4-1)}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\log x-\sqrt{\log^2 x+4\log x}\right)\log x$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\sqrt{x^2-4^{-x}}-x\sqrt{4^x-2^x/x}\right)$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\ln(2^x+1)}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

h) $\lim_{x\to-1}\dfrac{(e^x e-1)^2}{3x^3+5x^2+x-1}$

i) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{-x}\operatorname{sen}x-\cos 3x}{\log\big(x^3-\sqrt{x^6-2x^2}\big)}$

j) $\lim_{x\to0}\dfrac{\big(1+x^2\big)^{1/x}-2}{x-\sqrt{x^2-x^3}}$

k) $\lim_{x\to0}\dfrac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{2\cos x-\sqrt{4+x}}$

l) $\lim_{x\to-1}\dfrac{\big(1+\frac{1}{x}\big)^x-3}{(e-e^x)(1-2x^3-3x^2)}$

m) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3x}}{2x-\sqrt{x^2-x}}\right)^x$

n) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-2x-1}{2x^3-x}\right)^{x^2}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\dfrac{36}{x-3}-x^2-5x<\dfrac{24x+48}{x-4}$ (b) $\Big|3x+\max\{2-x,-2x\}-2\Big|\le-\dfrac{3x}{2}$

(c) $\dfrac{-x-2}{\sqrt{3x^2+8x}}\le\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{(x-3)(x-2)}{3|x-1|-2|x|+|x+1|-4}>0.$

3. Dimostrare che per ogni $n\ge0$ vale l'uguaglianza $\dfrac{2n+1}{2^{2n}}+\dfrac{2n+2}{2^{2n+1}}+\dfrac{2n+3}{2^{2n+2}}+\cdots+\dfrac{3n}{2^{3n-1}}+\dfrac{3n+1}{2^{3n}}=\dfrac{(2^{n+2}-3)(n+1)}{8^n}$.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per l'induzione.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 9 febbraio 2022

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-x^3)(3x^3+2x^2-x^4)}{(x-2)(1+2x^3+x^2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x^2-x)^2-x}-\sqrt{x^2-2x}\sqrt{x^2+2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2^x\sqrt{x^2+x2^{-x}}-x\sqrt{4^x-2^x/x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\cos 2x}{(x^3-3x-2)\tan(x+1)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5-2x^6+(x^2-2)(2x^4-3x^3)}{(x^2-1)(x^3+2x^4-1)-x^5(2x+1)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-\ln(2^x+1)}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\log x)\left(2-\log x+\sqrt{\log^2 x-4\log x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}\right)^x$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}\cos x+\operatorname{sen} x}{\log\left(2x^3-\sqrt{4x^6-2x^2}\right)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-3}{(e-e^x)(x^3-3x-2)}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{(e^x-e)^2}{2x^3-5x^2+4x-1}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{\cos x-\sqrt{1-2x}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\left(1-x^2\right)^{1/x}-2}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3+2x-1}{2x^3-x}\right)^{x^2}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{36}{x-2}+\frac{30x+54}{3-x}<x^2+7x$ (b) $\displaystyle\Big|3x+\max\{1-x,-2x\}-1\Big|\le-\frac{3x}{2}$

(c) $\displaystyle\frac{-x-3}{\sqrt{2x^2+9x}}\le\frac{2}{3}$ (d) $\displaystyle\frac{(x-3)(x+2)}{|x-1|-|x|+2|x+1|-3}\ge0.$

3. Dimostrare che per ogni $n\ge0$ vale l'uguaglianza $\displaystyle\frac{n+1}{2^n}+\frac{n+2}{2^{n+1}}+\frac{n+3}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{3n+3}{2^{3n+2}}+\frac{3n+4}{2^{3n+3}}=\frac{(4^{n+2}-3)(n+2)}{8^{n+1}}$.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per l'induzione.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 9 febbraio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(5x+x^3)(x^3-4x^4+3x)}{(1-3x)(3+2x^3-x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x^2+x)^2+x}-\sqrt{x^2+2x}\sqrt{x^2-2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\log^2 x+2\log x}+\log(1/x)-1\right)\log x$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2^x\sqrt{x^2+4^{-x}}-x\sqrt{4^x+2^x/x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2)(2x^4-3x^3)+3x^5-2x^6}{(x^2-2)(x^3+2x^4-1)-x^5(2x+1)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\cos 2x}{(2x^3+3x^2-1)\operatorname{sen}(x+1)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-\ln(3^x+1)}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{2x-\sqrt{x^2-x}}\right)^x$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-3x-1}{2x^3-x}\right)^{x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-2\left(1-x^2\right)^{1/x}}{x-\sqrt{x^2-3x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{(1-e^x e)^2}{2x^3+x^2-4x-3}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}\operatorname{sen} x-\cos x}{\log\left(x^3-\sqrt{x^6-3x^2}\right)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{(3x^2-2x^3-1)(e^x-e)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{\cos x-\sqrt{2x+1}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{36}{x+2}+\frac{30x-54}{x+3}>7x-x^2$ (b) $\displaystyle\Big|3x+\max\{2-x,-2x\}-2\Big|\le-\frac{4x}{3}$

(c) $\displaystyle\frac{-x-3}{\sqrt{5x^2+18x}}\le\frac{1}{3}$ (d) $\displaystyle\frac{(x-2)(x+3)}{|x-1|-2|x|+3|x+1|-4}\ge0.$

3. Dimostrare che per ogni $n\ge1$ vale l'uguaglianza $\displaystyle\frac{-n}{3^{-n+1}}+\frac{-n+1}{3^{-n+2}}+\frac{-n+2}{3^{-n+3}}+\ldots+\frac{n-3}{3^{n-2}}+\frac{n-2}{3^{n-1}}=\frac{(9^n+3)(1-2n)}{4\times3^n}$.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per l'induzione.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2021/2022

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 9 febbraio 2022

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x^2-x^3)(2x^2-3x^4+x^3)}{(2x+1)(2+3x^3-x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\sqrt{(x^2-x)^2+x}-\sqrt{x+1}\sqrt{x^3-3x^2}\Big)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(2^x\sqrt{x^2-x2^{-x}}-x\sqrt{4^x+2^x/x}\big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\cos 2x-1}{(2x^3-3x^2+1)\big(1-\sqrt{x}\big)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\sqrt{x^2+\ln(2+3^x)}-\sqrt{x^2+x}\Big)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5-2x^6+(x^2-2)(2x^4-3x^3)}{(x^2+3)(x^3+2x^4-1)-x^5(2x+1)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\log x)\Big(\sqrt{\log^2 x-2\log x}+1+\log(1/x)\Big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}\operatorname{sen} x+\cos x}{\log\big(2x^3-\sqrt{4x^6-x^2}\big)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{2x^3-x-1}{2x^3-2x}\Big)^{x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-2\big(1+x^2\big)^{1/x}}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\big(1+\frac{1}{x}\big)^x-e}{(3x-x^3-2)(e^x-e)}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+x}}\right)^x$

m) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{(e^x-e)^2}{x^3-5x^2+7x-3}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{2\cos x-\sqrt{4-x}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{36}{x+3}+\frac{24x-48}{x+4}>5x-x^2$ (b) $\displaystyle\Big|3x+\max\{1-x,-2x\}-1\Big|\le-\frac{4x}{3}$

(c) $\displaystyle\frac{-2x-3}{\sqrt{5x^2+9x}}\le\frac{2}{3}$ (d) $\displaystyle\frac{(x-2)(x+3)}{2|x-1|+|x+1|-|x|-3}>0.$

3. Dimostrare che per ogni $n\ge1$ vale l'uguaglianza $\displaystyle\frac{-2n}{3^{-2n+1}}+\frac{-2n+1}{3^{-2n+2}}+\frac{-2n+2}{3^{-2n+3}}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{2n-2}}+\frac{2n-2}{3^{2n-1}}=\frac{(3+81^n)(1-4n)}{4\times9^n}$.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per l'induzione.