Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta dell'1 febbraio 2022

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\cos x)}{3x - \sqrt{2 - 2\cos 3x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)\operatorname{sen} x + 2x\log\sqrt{1-x} - e^{-x}\tan x}{\big(x - \log(1+x)\big)(e^{1+x} - e^{1-x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x^3 + 16\sqrt{x+1} - 4(1+\cos x)\operatorname{sen} x - 16}{x^2\sqrt{\cos x - \cos 2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} 2x}\tan x - x(1-3x)\cos x}{x + |x^3 + x|}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \Big(\frac{1}{e^{1/n} - 1} - n\Big)$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{e^{2n^2 - n}}{\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{2n^3}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!(2n)^n}{(3n+1)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{\sqrt{|x+1|}}{x+3}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** calcolare $f''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

(a) $\dfrac{x^5 - x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2}$, (b) $\dfrac{4\log(x+1)}{(x+1)\sqrt{1 - 4\log^2(x+1)}}$, (c) $\dfrac{e^{2-\log^2 x}\log x}{x}$

(d) $(x - 2x^3)e^{-2x^2}$, (e) $\dfrac{2\log x}{x(2 + \log^2 x)}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)\sqrt{2x+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x+1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{n^2}, $n!$, $\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $1 - e^{1/n}$, $\sqrt{n^3 + 2n + 1}$, 2^{n^2}, $(n!)^{-n}$, n^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{3^{n+1}}{2n} < \dfrac{3}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^3}{3} + \cdots + \dfrac{3^n}{n} < \dfrac{2 \cdot 3^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta dell'1 febbraio 2022

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\cos x)}{3x - \sqrt{2 - 2\cos 3x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)\operatorname{sen} x + 2x\log\sqrt{1-x} - e^{-x}\tan x}{\big(x - \log(1+x)\big)(e^{1+x} - e^{1-x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x^3 + 16\sqrt{x+1} - 4(1+\cos x)\operatorname{sen} x - 16}{x^2\sqrt{\cos x - \cos 2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} 2x}\tan x - x(1-3x)\cos x}{x + |x^3 + x|}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{1}{e^{1/n} - 1} - n\Big)$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n^2-n}}{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{2n^3}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!(2n)^n}{(3n+1)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{\sqrt{|x+1|}}{x+3}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** calcolare $f''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

(a) $\dfrac{x^5 - x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2}$, (b) $\dfrac{4\log(x+1)}{(x+1)\sqrt{1 - 4\log^2(x+1)}}$, (c) $\dfrac{e^{2-\log^2 x}\log x}{x}$

(d) $(x - 2x^3)e^{-2x^2}$, (e) $\dfrac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)\sqrt{2x+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x+1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{n^2}, $n!$, $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $1 - e^{1/n}$, $\sqrt{n^3 + 2n + 1}$, 2^{n^2}, $(n!)^{-n}$, n^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{3^{n+1}}{2n} < \dfrac{3}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^3}{3} + \cdots + \dfrac{3^n}{n} < \dfrac{2\cdot 3^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.