Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2020/2021

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 6 settembre 2021

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^x+1)^2 + 8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2-x)}{\max\{2x^2, 3x\}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3\big(2\operatorname{sen}(1/x) - \operatorname{sen}(2/x)\big)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{20(\cos x - 2)e^{-x} - 4(1+2x)^{5/2} + 25(1-x)x\operatorname{sen} 2x + 24}{\sqrt{x^2-2x^4} - \sqrt{x^4+x^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{1-x} - (2x^2-2x+2)e^x \operatorname{sen} x + x^2\cos x}{|x|^{2x}(2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 2\arctan(1/x)}{\arctan x}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n^2+n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{2n^3}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{n!}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n!(3n)!}{\big((2n)!\big)^2}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{e^{6x-6x^2}}{12x^2+6x+1}$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, e studiare gli intervalli di crescenza/decrescenza, massimi e minimi locali e globali di f; **c)** calcolare $f''(x)$ e stimare il numero di flessi del grafico di f; **d)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^5-4x^2-30}{x^4+4x^3+5x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\frac{1}{2x}}{1+(2x+\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{\log x}{x\big(2+\log^2 x\big)}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{x^2+1}{x}\log^2(x), \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2x-4x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4+2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $\log(3^n-2^n)$, $\arccos(1-\frac{1}{n})$, e^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $\dfrac{2^1}{1^3}+\dfrac{2^2}{2^3}+\dfrac{2^3}{3^3}+\dfrac{2^4}{4^3}+\dfrac{2^5}{5^3}+\cdots+\dfrac{2^n}{n^3} < \dfrac{2^{n+2}}{n^2}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.