Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2020/2021

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 23 luglio 2021

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x(2x-2x^2-2)\operatorname{sen} x + x^2\cos x + 2x\sqrt{1-x}}{(2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)(1+x)^{1/x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x-x^2) + 3x(1+e^x)^2}{|x^2-x|+x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{24 - 4(2x+1)^{5/2} - 25(x-1)x\operatorname{sen} 2x + 20(\cos x - 2)e^{-x}}{\left(\sqrt{x^2-x^3}-x\right)\operatorname{sen} x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) - x\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\right)\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1}{e^{1/n}-1} - n\right)$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^3}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{n!}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{n+1}}{((n+1)!)^2}$

2. Data la funzione $f(x) := (2x+1)^2\log|e-4ex|$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, mostrando che $f'(0)=0$; **c)** posto $g(x) := f'(x)/(2x+1)$, studiare i limiti agli estremi e gli intervalli di monotonia di g, e dedurne il segno di $g(x)$; **d)** dal punto precedente dedurre il segno di $f'(x)$ e gli intervalli di monotonia del grafico di f, con i punti di massimo o minimo locali o globali; **e)** calcolare $f''(x)$ e studiarne i limiti agli estremi del dominio; **f)** calcolare $f'''(x)$ e studiarne il segno; **g)** dal segno di $f'''(x)$ dedurre che il grafico di f ha esattamente due flessi; **h)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+x^3+3}{(x-2)(x^2+2x+2)}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{2+\frac{1}{x}}{1+(2x+\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2+1)\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-x^2}-x}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt[n]{2^n+n}$, $\arccos(n/(n+1))$, e^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la disuguaglianza $1^2+2^4+3^6+\cdots+n^{2n} < 2n^{2n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.