Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2020/2021

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBML, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 7 luglio 2021

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\cos x)}{3x - \sqrt{6\cos x - 6\cos 2x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x^3 + 8\sqrt{1+x} - 2(1+\cos x)\operatorname{sen} x - 8}{x^2\sqrt{\cos x - \cos 2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2-x^2)\operatorname{sen} 2x - 4e^{-x}\tan x + 8x\log\sqrt{1-x}}{(e^{1-x} - e^{x+1})\big(\log(x+1) - x\big)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x-3)\cos 2x + 3e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{x - |x^3 - x|}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{2n^3}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+1)!}{(2n)!(2n)^n}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(n + \frac{1}{1 - e^{1/n}}\Big)$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

2. Data la funzione $f(x) := x\sqrt{\left|\dfrac{x}{3x^2-1}\right|}$, trovare **a)** dominio, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** calcolare $f''(x)$ dove esiste e trovare gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^5+x^3+3}{x^4+2x^3+2x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{4\tan x}{(\cos^2 x)\sqrt{1-4\tan^2 x}}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{e^{2+\log^2 x}\log x}{x}$$

$$\text{(d)}\quad (x-3x^3)e^{-x^2}, \qquad \text{(e)}\quad \frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{2x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{n^2}, $n!$, $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $1 - e^{1/n}$, $\sqrt{n^3+2n+1}$, 2^{n^2}, $(n!)^{-n}$, n^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{2^{n+1}}{n} \leq \dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^3}{3} + \cdots + \dfrac{2^n}{n} < \dfrac{3\cdot 2^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.