Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, IBW ☐ e ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 4 febbraio 2021

Cognome e Nome:

Matricola:

La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Fare in modo che nella scansione di ogni foglio appaia la tessera universitaria. In almeno un foglio compaia anche la carta d'identità o patente, nonché una dichiarazione di non avere imbrogliato. Spedire le scansioni come allegati a una mail che porti come oggetto "compito" cognome nome matricola (per esempio *"compito Alighieri Dante 132109"*), indirizzata a `gianluca.gorni@uniud.it`. Se l'allegato supera i 5 megabyte circa può convenire spezzarlo in due mail.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x + 2\cos 2x)\operatorname{sen} x - 3(1+x^2)\arctan x}{x\sqrt{1-e^{-x^2}}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3-3x)\operatorname{sen} 2x + 4x(2x-1)\cos x - 2e^x \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}\big(\log(1-x^2)\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^{2n}}{(3n+1)!}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(ex\left(1-\frac{1}{x}\right)^x - x\right)$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{3+6x^2-x^4} - \dfrac{1}{8}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x-1}{x^3-x^2-3x-1},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen} x}{2(1+\cos x)\sqrt{\cos x}},\ \text{(c)}\ \frac{2\log x}{x(2-\log^2 x)},\ \text{(d)}\ x\cos(\log x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale l'uguaglianza $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \geq (n+1)^n/6$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6.