Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 4 settembre 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cos x + 2x\sqrt{1+x} - (2x+2-2x^2)e^x \operatorname{sen} x}{|2x|^x(2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^x+1)^2 + 8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2-x)}{\max\{2x^2, 3x\}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3\big(\operatorname{sen}(2/x) - 2\operatorname{sen}(1/x)\big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{25x(1-2x)\operatorname{sen} 2x - 24 - 6(1-2x)^{5/2} + 10(2+\cos 2x)e^{-x}}{\sqrt{x^2-2x^4} - \sqrt{2x^4+x^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{e^{2n^2-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\pi - 2\arctan(1/x)}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{\big((2n)!\big)^2}{(3n)!\cdot n!}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{n!}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{e^x(x-3)}{x^2+4x+6}$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, con gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** calcolare $f''(x)$, mostrando che esiste un solo flesso; **d)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^5-8x^3-45}{x^4+4x^3+5x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\frac{1}{2x}}{1+(2x+\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{\log x}{x\big(1-2\log^2 x\big)}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{x^2+2}{x}\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-3}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}-3}$.

5. Poniamo $X := \big\{\max\big\{(n+2)/(3n+1), -n-1\big\} \ : \ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^2 + 2^4 + 3^6 + \cdots + n^{2n} < 3n^{2n}/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 4 settembre 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(2x+1)^{5/2} - 18 - 5(2-x)x \operatorname{sen} 2x + 5(\cos 2x + 2e^{-x})}{\sqrt{3x^4+x^2} - \sqrt{x^4+x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(2+e^x)^2 + 6\cos(x^2-x) - 6(1+x)^{3/2}}{\min\{3x^2, 2x\}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{1-x} - (2x^2-2x+2)e^x \operatorname{sen} x + x^2\cos x}{|x|^{2x}(2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3\big(2\operatorname{sen}(1/x) - \operatorname{sen}(2/x)\big)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} e^{2n^2+n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{2n^3}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{2n}}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{\big((2n)!\big)^2}{n!(3n)!}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{2\arctan(1/x) - \pi}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+3}{e^x(x^2-4x+6)}$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, con gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** calcolare $f''(x)$, mostrando che esiste un solo flesso; **d)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^5-4x^2-30}{x^4+4x^3+5x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}{1+(x-2\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{\log x}{x\big(2-\log^2 x\big)}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{x^2-1}{x}\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\arccos 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{20x^2+2x-12x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$.

5. Poniamo $X := \big\{\max\big\{(n-3)/(3n-4), n-2\big\} \,:\, n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^2 + 2^4 + 3^6 + \cdots + n^{2n} < 2n^{2n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 4 settembre 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{20(\cos x - 2)e^{-x} - 4(1+2x)^{5/2} + 25(1-x)x \operatorname{sen} 2x + 24}{\sqrt{x^2 - 2x^4} - \sqrt{x^4 + x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(1+e^{-x})^2 + 8\cos(x+x^2) - 8(1+x)^{3/2}}{\max\{2x, 3x^2\}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(2x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right) - x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2+x^2-x)e^{-x}\operatorname{sen} x - 2x\sqrt{x+1} + 4x^2\cos x}{(3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)|x|^{-2x}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n)!\cdot n!}{\big((2n)!\big)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}{e^{2n^2-n}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan(1/x) - \pi}{\arctan x}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n+2}}{(n+1)!}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{(3-x)e^x}{x^2+4x+6}$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, con gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** calcolare $f''(x)$, mostrando che esiste un solo flesso; **d)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^5+x^3+45}{x^4-4x^3+5x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1-\frac{1}{2x}}{1+(2x-\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{\log x}{x\big(1+2\log^2 x\big)}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{2-x^2}{x}\log^2 x, \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2x-4x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x}-1}$.

5. Poniamo $X := \big\{\max\{(n-2)/(3n-1), n-1\} \ : \ n \in \mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^2 + 2^4 + 3^6 + \cdots + n^{2n} < 11n^{2n}/10$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 4 settembre 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6(1-x)^{3/2} + x(e^{-x}+2)^2 - 6\cos(x^2+x)}{\min\{3x, 2x^2\}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{2x} \right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{-x}(x+1-x^2)\operatorname{sen} x - 2x\sqrt{x+1} + x^2\cos x}{(\operatorname{sen} 3x - 3\operatorname{sen} x)|2x|^{-x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{25x(1+x)\operatorname{sen} 2x + 24 - 4(1+2x)^{5/2} - 20(2-\cos x)e^{-x}}{\sqrt{x^2-x^4} - \sqrt{2x^4+x^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^3} e^{2n^2+2n}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n^{2n+2}}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n!(3n)!}{\big((2n)!\big)^2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 2\arctan(1/x)}{\arctan x}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+3}{(4x-x^2-6)e^x}$, **a)** trovare dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** calcolare $f'(x)$, con gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** calcolare $f''(x)$, mostrando che esiste un solo flesso; **d)** tracciare un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-3x+15}{x^4-4x^3+5x^2}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}{1+(x+2\log x)^2}, \qquad \text{(c)}\quad \frac{\log x}{x\big(2+\log^2 x\big)}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{x^2+1}{x}\log^2(x), \qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{4x-7x^2-4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}-2}$.

5. Poniamo $X := \big\{\max\big\{(n+3)/(3n+4), -n-2\big\} \ : \ n \in \mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^2 + 2^4 + 3^6 + \cdots + n^{2n} < 4n^{2n}/3$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.