Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 7 luglio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cos x - 2x\sqrt{x+1} + 2e^x(x-1)^2 \operatorname{sen} x}{x^2(x-\sqrt{x^2-x^3})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x+1}\right) - x\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}\right)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x(\cos 2x - \operatorname{sen} x) - x^2(3x-1) + 2 - 2\sqrt{2x+1}}{\left(e^{2x}+\sqrt{\tan x}\right)(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^x+1)^2 - 8\cos(x-x^2) + 8(1-x)^{3/2}}{x - |x^3+x|}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n^2-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(\cos x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(n-1)^{n-1}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{n!}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+3}{x+1}\sqrt{|4x+3|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

(a) $\displaystyle\frac{x^4+x^3+2}{(x+2)(x^2-2x+2)}$, (b) $\displaystyle\frac{1+\frac{2}{x}}{1+(x+2\log x)^2}$, (c) $\displaystyle\frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$

(d) $(2-x^2)\log^2 x$, (e) $\displaystyle\frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x+x^2\sqrt{2-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt[n]{2^n+n}$, $\arccos(n/(n+1))$, e^{-n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{3^{n+1}}{2n} < \dfrac{3}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{3^3}{3}+\cdots+\dfrac{3^n}{n} < \dfrac{2\cdot 3^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 7 luglio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{8\sqrt{1-x}-3(x-3)x^2-4(2x-\cos x)\operatorname{sen}x-8}{(\operatorname{sen}2x-3\operatorname{sen}x)^3(e^x-\sqrt{\tan 2x})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos x-2x\sqrt{1-x}+2e^x(x-1)^2\operatorname{sen}x}{x^2\left(x-\sqrt{x^2-x^3}\right)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{6\cos(x-x^2)-6(1+x)^{3/2}+x(2+e^x)^2}{x-|x-x^3|}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\log\left(\left(1+\frac1x\right)^x\right)-x\log\left(\left(1+\frac1x\right)^{x+1}\right)\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n^2+n}\left(1-\frac1n\right)^{2n^3}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x)}{\arccos(\cos x)}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^{2n}}}$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!)^2}{n^{n+1}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x-1}{3x-1}\sqrt{|4x-1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-2x^3+1}{(x+2)(x^2-2x+2)},\qquad \text{(b)}\quad \frac{2+\frac1x}{1+(2x+\log x)^2},\qquad \text{(c)}\quad \frac{4\log x}{x(1-2\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (2x^2+1)\log^2 x,\qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x+4x^2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-4}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{-n}, $\sqrt[n]{n+2^n}$, $\arccos(n/(n+1))$, n^{2n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, $(2n)!$, $\left(1-\frac1n\right)^{n^3}$.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{e^{n+1}}{(e-1)n}<\dfrac{e}{1}+\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^3}{3}+\cdots+\dfrac{e^n}{n}<\dfrac{e^{n+1}}{(e-2)n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 7 luglio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8\sqrt{x+1}-(2x-1)x^2-2(1+\cos x)\operatorname{sen} x-8}{(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 2x)^2(\sqrt{e^x}-\cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{7x^2\cos x+2x\sqrt{x+1}-2e^{2x}(x+1)^2\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^6-x^7}-x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(1+e^{-x})^2+8\cos(x^2+x)-8(x+1)^{3/2}}{|x^3+x|+x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)-\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x}\right)\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^3}}{e^{2n^2-n}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n+2}}{(n+1)!}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arccos x)}{\arccos(\cos x)}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x+1}{3x+1}\sqrt{|4x+1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4+x^3+3}{(x-2)(x^2+2x+2)},\qquad \text{(b)}\quad \frac{2-\frac{1}{x}}{1+(2x-\log x)^2},\qquad \text{(c)}\quad \frac{2\log x}{x(2-\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2-1)\log^2 x,\qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x-4x^2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-4}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt[n]{2^n-n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, e^{-n}, n^{2n}.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{\pi^{n+1}}{(\pi-1)n}<\dfrac{\pi}{1}+\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{\pi^3}{3}+\cdots+\dfrac{\pi^n}{n}<\dfrac{\pi^{n+1}}{(\pi-2)n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 7 luglio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x+1}\right)-\log\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}\right)\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{-x}+2)^2-6\cos(x^2+x)+6(1-x)^{3/2}}{x+|x-x^3|}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{24\sqrt{1-x}-5x^2(x-3)+12x(\cos x-\operatorname{sen} x)-24}{(\operatorname{sen} 2x-\operatorname{sen} x)^3(\sqrt{e^x}-\arctan 2x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5x^2\cos x+2x\sqrt{1+x}-e^x(x+1)^2\operatorname{sen} 2x}{x^3-\sqrt{x^6-x^7}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}e^{2n^2+2n}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{((n+1)!)^2}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n^{2n+2}}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arccos(\cos x)}{\cos(\arccos x)}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x-3}{x-1}\sqrt{|4x-3|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere degli eventuali punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (la penultima per parti):

$$\text{(a)}\quad \frac{x^4-x^3+2}{(x-2)(x^2+2x+2)},\qquad \text{(b)}\quad \frac{1-\frac{2}{x}}{1+(x-2\log x)^2},\qquad \text{(c)}\quad \frac{4\log x}{x(1+2\log^2 x)}$$

$$\text{(d)}\quad (x^2+1)\log^2 x,\qquad \text{(e)}\quad \frac{1+\tan^2(\arccos 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{2-x^2}-x}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 2^{-n^2}, $\sqrt[n]{2^n-n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, n^{2n}, e^{-n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 2$ vale la disuguaglianza $\dfrac{2^{n+1}}{n}\leq\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}+\cdots+\dfrac{2^n}{n}<\dfrac{3\cdot 2^n}{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4+3, 6, 6, 6, 6.