Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 12 febbraio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-e^{1-x}}{(2x^2-1-x)(x^2+x-2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{(3x-2x^3)(x^3+x^4-3)}{(2-x)(x+2)(3x^2+x+1)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(2\sqrt{x^4+4x^3}-x-\sqrt{5x^4-x^2}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(\log x-\sqrt{\log(2x^3)+\log^2 x}\Big)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^5(1-x^2)+(x^4-3x-x^2)(3x^3-1)}{(1+x)^3(x^3-5x^2-1)-x^4(1-x)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(\sqrt{x+2^{2x-2}}-\sqrt{4^{x-1}-3\cdot 2^x}\Big)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(1-\sqrt{\cos(1/x)}\Big)(\operatorname{sen} x+3x\cos x)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\log\big((ex-1)/x\big)-e^{1/x}}{\sqrt{x^2-2x}-1+x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{x-1+\sqrt{\cos x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^x-\sqrt{x+2}}{(x^3-3x)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(\frac{x^2-3x}{3+2x+x^2}\Big)^{x/2}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+x)}{x-\sqrt{x^2-x\log(2x)}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(1-2x+x^2)}{x(x^2+x-4)(1-x)^2}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{4x^2+2x}-x}\Big)^{\sqrt{x}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{48-24x}{x+4}-\frac{36}{x+3}\ge x^2-5x$, (b) $\displaystyle\Big|3x+\max\{2-x,-2x\}-2\Big|\le -\frac{3x}{2}$, (c) $\displaystyle\frac{-x-2}{\sqrt{3x^2+8x}}\le\frac{1}{2}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $b_0=1$, $b_1=-1$, $b_{n+2}=b_{n+1}/2-b_n/4$. Dimostrare che per ogni $n\ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|b_n|\le 1$, $b_{n+3}=-b_n/8$, $|b_n|\le 2^{2-n}$.

4. Poniamo $X:=\big\{\max\{-n-2,(n+3)/(3n+4)\} \ : \ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 12 febbraio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^2x^5+(x+x^3-2x^2)(2x-x^4)}{(x+1)^3(x^3-1-5x^2)-(1-x)^2x^4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{3^{2x+4}-x}-\sqrt{9^{x+2}-3^x\cdot 2}\Big)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{\log^2 x-\log(x^2)}-\sqrt{\log^2 x+\log x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(2\sqrt{2x^4-x^3}+x-\sqrt{9x^4+x^2}\Big)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\log(-x)}{(3+x^2+4x)(x^2-x-2)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)(5-x^5+x^3)}{(1-2x^2+4x)(1+2x^2)^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x\operatorname{sen}x-\cos 3x)\Big(\sqrt{\cos(1/x)}-1\Big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-2x-1}{x^2-x}\Big)^{x/2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1/x}-\ln\big((ex+1)/x\big)}{x+1+\sqrt{x^2+2x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x-\sqrt{4x^2+2x}}{\sqrt{x}-x}\Big)^{\sqrt{x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{3-x}}{(2x^4-x)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2x)}{x-\sqrt{x^2+2x\log x}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{\sqrt{\cos x}-1-x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\operatorname{sen}(1+2x+x^2)}{x(x^2-x-5)(x+1)^2}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{30x-54}{x+3}+\frac{36}{x+2}\le 7x-x^2$, (b) $\displaystyle\Big|3x+\max\{1-x,-2x\}-1\Big|\le-\frac{3x}{2}$, (c) $\displaystyle\frac{-2x-3}{\sqrt{5x^2+9x}}\le\frac{2}{3}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $c_0=0,\ c_1=1,\ c_{n+2}=c_{n+1}/2-c_n/4$. Dimostrare che per ogni $n\ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|c_n|\le 2,\ c_{n+3}=-c_n/8,\ |c_n|\le 2^{2-n}$.

4. Poniamo $X:=\big\{\max\{n-1,(n-2)/(3n-1)\}\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 12 febbraio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(2\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{10x^4-x^2}-x\Big)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)(x^3-2+3x^5)}{(2x^2-1)(1+3x-x^2)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{x+2^{2x-2}}-\sqrt{4^{x-1}+3\cdot 2^x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-3x^3)(x^4-x^2+3x)+3(x^2-1)x^5}{(x-1)^2x^4+(1-x^3+5x^2)(x+1)^3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(1-\sqrt{\cos(1/x)}\Big)(x\operatorname{sen}x-\cos 3x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\log(-x)}{(1+2x^2+3x)(x^2-x-2)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{\log^2 x+\log x}-\sqrt{\log^2 x-\log(x^2)}\Big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\operatorname{sen}(1+2x+x^2)}{x(x^2+x-3)(x+1)^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-x}{x-\sqrt{4x^2+2x}}\right)^{\sqrt{x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{3+x}}{(2x^3-x)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{1-2x-\sqrt{\cos x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-x-2}\right)^{x+1}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1/x}-\log\big((ex-1)/x\big)}{x-1+\sqrt{x^2-2x}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2x)}{x-\sqrt{x^2+x\log(2x)}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\dfrac{30x+54}{3-x}+\dfrac{36}{x-2}\ge x^2+7x$, (b) $\Big|3x+\max\{1-x,-2x\}-1\Big|\le-\dfrac{4x}{3}$, (c) $\dfrac{-x-3}{\sqrt{5x^2+18x}}\le\dfrac{1}{3}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $d_0=1$, $d_1=-2$, $d_{n+2}=d_{n+1}/2-d_n/4$. Dimostrare che per ogni $n\ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|d_n|\le 2$, $d_{n+3}=-d_n/8$, $|d_n|\le 2^{3-n}$.

4. Poniamo $X:=\big\{\max\{n-2,(n-3)/(3n-4)\}\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2019/2020

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 12 febbraio 2020

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-e^{1-x}}{(2x^2-3x+1)(x+x^2-2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x^4-x^3}-\sqrt{3x^4-2x^2}+x\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\log x-\sqrt{\log^2 x-\log(2x^3)}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x-x^4)(x^3-2x^2+x)+(1-x)^2x^5}{(x^3-5x^2-1)(1+x)^3-x^4(x-1)^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3^{2x+4}-x}-\sqrt{3^x\cdot 2+9^{x+2}}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{sen} x-3x\cos x)\left(\sqrt{\cos(1/x)}-1\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x-x^3)^2(x^2-3x^4-x)}{(1+3x)^3(2x^3-x^2+1)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2x}{2+x^2-3x}\right)^{x-2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\big((ex+1)/x\big)-e^{1/x}}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2+2x}-x}{x-\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^x-\sqrt{2-x}}{(2x^4-x)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{x-\sqrt{x^2-3x\log x}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{1+2x-\sqrt{\cos x}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(1-2x+x^2)}{x(x^2+x+2)(x-1)^2}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a)}\ \frac{36}{x-3}-\frac{24x+48}{x-4}\ge x^2+5x,\quad \text{(b)}\ \Big|3x+\max\{2-x,-2x\}-2\Big|\le -\frac{4x}{3},\quad \text{(c)}\ \frac{-x-3}{\sqrt{2x^2+9x}}\le\frac{2}{3}.$$

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $a_0=-1$, $a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}/2-a_n/4$. Dimostrare che per ogni $n\ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|a_n|\le 1$, $a_{n+3}=-a_n/8$, $|a_n|\le 2^{2-n}$.

4. Poniamo $X:=\big\{\max\{-n-1,(n+2)/(3n+1)\}\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $+\infty$ è l'estremo superiore e 0 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.