Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 24 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\cos x - 4(1+x)^{3/2} + 3x(e^{2x}+e^{-x})}{x\cdot\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x\cos 2x + 2\cos 2x - e^x(x^2+2) - 6\log(1-x^2)}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2)!}{n^{n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$

2. Data la funzione $f(x) := x + \log\left|\dfrac{2-2x}{x^2-2}\right|$, trovare **a)** dominio, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i massimi/minimi locali; **c)** mostrare che f si annulla in esattamente tre punti; **d)** $f''(x)$, mostrando che il grafico di f ha esattamente 2 flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-x+2}{(x^2-2x+2)(x+1)},\ \text{(b)}\ \frac{3\tan x}{1+\log^2(\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{2-3\tan x},\ \text{(d)}\ (2+x)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+4-\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $\log(1+n^n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, $(n+1)^n$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, n^{n+1}.

6. Poniamo $X := \left\{2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n - \left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = e$ e che $\inf X = 0$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $b_n := F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n}$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $b_{n+3} = 4b_{n+2} - 4b_{n+1} + b_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $b_n = F_{2n-1} - 1$ per ogni $n\geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 24 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 4\operatorname{sen} x\cos 2x + 7\log(x^2+1) - 2(1+x^2)e^{-2x}}{(\cos 3x - \cos x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)^{3/2} - 3x(2e^x - e^{2x}) - 2\cos x}{x\cdot\sqrt{1-\cos x}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

2. Data la funzione $f(x) := \log\left|\dfrac{2x+2}{x^2-2}\right| - x$, trovare **a)** dominio, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i massimi/minimi locali; **c)** mostrare che f si annulla in esattamente tre punti; **d)** $f''(x)$, mostrando che il grafico di f ha esattamente 2 flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x^3+1}{(x^2+2x+2)(x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}(\cos x+1)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{4+\tan x},\ \text{(d)}\ (2-x)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-2\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, n^{n+1}, $\log(1+n^n)$, $\operatorname{sen}(1/n)$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $(n+1)^n$.

6. Poniamo $X := \left\{\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} - 2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 0$ e che $\inf X = -e$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $a_n := F_0 + F_1 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n}$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $a_n = F_{2n+2} - 1$ per ogni $n\geq 0$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 24 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + \log(1-2x) + 2(2x^2-1)e^x + 2\cos x \operatorname{sen} 2x}{(\cos x - \cos(4x))\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)^{3/2} - 2\cos 2x - 3x(2e^x - e^{-x})}{x\cdot\sqrt{e^{x^2}-1}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - 1\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \log\left|\dfrac{x^2-2}{2-2x}\right| - x$, trovare **a)** dominio, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i massimi/minimi locali; **c)** mostrare che f si annulla in esattamente tre punti; **d)** $f''(x)$, mostrando che il grafico di f ha esattamente 2 flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+2x-2}{(x^2+2x+2)(x-2)},\ \text{(b)}\ \frac{3\cos(\log x)}{\big(1+\operatorname{sen}^2(\log x)\big)x},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{1-4\tan x},\ \text{(d)}\ (x-2)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1+\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, $(n+1)^n$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $\log(1+n^n)$, n^{n+1}, $\operatorname{sen}(1/n)$.

6. Poniamo $X := \left\{2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 6$ e che $\inf X = 1/e$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $d_n := F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + (-1)^{n-1}F_{n-1} + (-1)^n F_n$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $d_{n+3} = 2d_{n+1} - d_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $d_n = (-1)^n F_{n-1} - 1$ per ogni $n\geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 24 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+1)+2e^{-x}(2x^2-1)+2\cos 2x-2\operatorname{sen} x\cos x}{\big(1-\sqrt{1-x}\big)(\cos x-\cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1-x)^{3/2}-3x(e^x-3e^{-x})-4\cos x}{x\cdot\sqrt{1-\exp(-x^2)}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2)!}{n^{n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$

2. Data la funzione $f(x) := x-\log\left|\dfrac{2x+2}{x^2-2}\right|$, trovare **a)** dominio, continuità, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i massimi/minimi locali; **c)** mostrare che f si annulla in esattamente tre punti; **d)** $f''(x)$, mostrando che il grafico di f ha esattamente 2 flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x+3}{(x^2-2x+2)(x-1)},\ \text{(b)}\ \frac{2\operatorname{sen}(\log x)}{\big(1+\cos^2(\log x)\big)x},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 2x}{1-2\tan 2x},\ \text{(d)}\ (2+x)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\log(1+n^n)$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, n^{n+1}, $\operatorname{sen}(1/n)$, $(n+1)^n$, $\sqrt[n]{1+n^n}$.

6. Poniamo $X := \left\{\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n-2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X=-1/e$ e che $\inf X=-6$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0:=0,\ F_1:=1,\ F_{n+2}:=F_n+F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $c_n := F_0-F_1+F_2-F_3+\cdots+(-1)^{2n-1}F_{2n-1}+(-1)^{2n}F_{2n}$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $c_{n+3}=4c_{n+2}-4c_{n+1}+c_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $c_n=F_{2n-1}-1$ per ogni $n\geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.