Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta dell'8 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}-e^{n^2}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{24\big(1-\sqrt{1-x}\big)+21x^2-7x^3-12(2x+\cos x)\operatorname{sen}x}{\big(\operatorname{sen}2x-3\operatorname{sen}x\big)^3(e^x-\tan 2x)}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arccos(|\operatorname{sen}x|/x)}{x}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$

2. Data la funzione $f(x):=(12-x)\sqrt{|2x^2-3x+1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere dei punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x-1}{x^3-2x^2+2x},\ \text{(b)}\ \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}(1+4\tan x)},\ \text{(c)}\ \frac{3\log x}{x\sqrt{1-9\log^4 x}},\ \text{(d)}\ x^5e^{x^2/3}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{4x-x^3}{x^2-4+2\sqrt{2-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{2-x^2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(2n)!$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, n^{2n}, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$, $(1+n^3)^{1/n}$, $\arccos(n/(n+1))$, e^{-n}.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \log(e^{x+2}-e)\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{x}{1+\exp(2x)}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\cos(-x)}{1-2x^4}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la disuguaglianza $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)<3\sqrt{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta dell'8 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3} e^{n^2}$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{12x(\cos x-\operatorname{sen} x)-24\big(1-\sqrt{1-x}\big)+5x^3+15x^2}{\big(\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x\big)^3(e^x-\arctan 2x)}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arccos(e^{-x^2})}{x}$

2. Data la funzione $f(x):=(9x-4)\sqrt{|2x^2+x-1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere dei punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-x+1}{x^3+2x^2+2x},\ \text{(b)}\ \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}(1+\tan x)},\ \text{(c)}\ \frac{\log x}{x\sqrt{1-\big(1+\log^2 x\big)^2}},\ \text{(d)}\ e^{2x^2}x^5$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{x^3-x}{x^2+1+2\sqrt{x^2-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x^2-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{-n}, $(n^3+1)^{1/n}$, $\arccos(n/(n+1))$, n^{2n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, $(2n)!$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \log(e-e^{x-1})\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{x}{1-2\exp x}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\cos(-x)}{1-x^4}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la disuguaglianza $\big(1-\frac{1}{2}\big)\big(1-\frac{1}{4}\big)\big(1-\frac{1}{6}\big)\cdots\big(1-\frac{1}{2n}\big)>1/(3\sqrt{n})$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta dell'8 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 2\operatorname{arcsen}(|\operatorname{sen} x|/x)}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8\sqrt{x+1} + 2x^3 + x^2 - 8 - 2(1+\cos x)\operatorname{sen} x}{\big(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x\big)^3 (e^x - \tan 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{n^2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n^3}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n-1}}{(2n-1)!}$

2. Data la funzione $f(x) := (9x+4)\sqrt{|2x^2 - x - 1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere dei punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2},\ \text{(b)}\ \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}(1+2\tan x)},\ \text{(c)}\ \frac{4\log x}{x\sqrt{1-16\log^4 x}},\ \text{(d)}\ x^5 e^{3x^2}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 1 - 2\sqrt{x^2-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $(n^3+1)^{1/n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $\sqrt{n^4-2n+1}$, 2^{-n^2}, e^{-n}, n^{2n}.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \log(e - e^{-x-1})\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{x}{1+2\exp x}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\cos(-2x)}{1-3x^4}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $\big(1-\frac{1}{3}\big)\big(1-\frac{1}{5}\big)\big(1-\frac{1}{7}\big)\cdots\big(1-\frac{1}{2n+1}\big) > 1/(2\sqrt{n})$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2018/2019

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta dell'8 luglio 2019

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\big(1-\sqrt{2x+1}\big)+2x(\cos 2x-\operatorname{sen} x)+3x^3+x^2}{\big(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 3x\big)^3(e^{2x}+\tan x)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{n^2}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}(e^{-x^2})}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!}{n^{2n-1}}$

2. Data la funzione $f(x) := (x+12)\sqrt{|2x^2+3x+1|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** $f'(x)$, gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f, **c)** il carattere dei punti di non derivabilità di f; **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+2x+3}{x^4-2x^3+2x^2},\ \text{(b)}\ \frac{1+\tan^2 x}{2(1+\tan x)\sqrt{\tan x}},\ \text{(c)}\ \frac{\log x}{x\sqrt{1-\big(1-\log^2 x\big)^2}},\ \text{(d)}\ e^{x^2/2}x^5$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{3-x^2+2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{1-x^2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 2^{-n^2}, $(n^3+1)^{1/n}$, $(2n)!$, $\arccos(n/(n+1))$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, n^{2n}, e^{-n}, $\sqrt{n^4-2n+1}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ \log(e^{x-1}+e)\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{x}{1-3\exp x}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\cos(-2x)}{1+2x^4}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la disuguaglianza $\big(1+\frac{1}{2}\big)\big(1+\frac{1}{4}\big)\big(1+\frac{1}{6}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{2n}\big)<2\sqrt{n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.