Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, IBW ☐ e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 6 settembre 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3x^2-3)\arctan x + (e^x + 2\cos x)\operatorname{sen} x}{x\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}\operatorname{sen} x - 3(2x-1)\operatorname{sen} 2x + 8(x-1)x\cos x}{\big(\log(1+x^2)\big)\sqrt{1-\cos x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{e} - x\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^x\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^{2n}}{(3n+1)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{3+6x^2-x^4} + \dfrac{1}{8}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi (gli zeri si trovano con Ruffini); **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (si scompone facilmente); **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x-1}{x^3+x^2-3x+1},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{\big(1+\cos^2(\log x)\big)x},\ \text{(c)}\ \frac{2\log x}{(2+\log^2 x)x},\ \text{(d)}\ \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(3x+1)}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n \geq (n+1)^n/4$. Possono essere utili le proprietà note della successione fondamentale $(1+1/n)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, IBW ☐ e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 6 settembre 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3-3x^2)\arctan x - (2e^x+\cos x)\operatorname{sen} x}{x\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x-3)\operatorname{sen} 2x + 16x(x+1)\cos x - 10e^{2x}\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}\big(\log(1+x^2)\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!\cdot n^{2n}}{(3n-1)!}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{x}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{x^4-6x^2-3} + \dfrac{1}{8}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi (gli zeri si trovano con Ruffini); **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (si scompone facilmente); **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-x+1}{x^3+x^2-3x+1},\ \text{(b)}\ \frac{\tan x}{1+\log^2(\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{4\log(x)}{(1-2\log^2(x))x},\ \text{(d)}\ \frac{\cos(\log x)}{x^2}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n \geq (n+1)^n/5$. Possono essere utili le proprietà note della successione fondamentale $(1+1/n)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, IBW ☐ e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 6 settembre 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x + 2\cos 2x)\operatorname{sen} x - 3(1+x^2)\arctan x}{x\sqrt{1-e^{-x^2}}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(3-3x)\operatorname{sen} 2x + 4x(2x-1)\cos x - 2e^x \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}\big(\log(1-x^2)\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(ex\left(1-\frac{1}{x}\right)^x - x\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n-1)!}{(n-1)!\cdot n^{2n}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{3+6x^2-x^4} - \dfrac{1}{8}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi (gli zeri si trovano con Ruffini); **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (si scompone facilmente); **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x+1}{x^3-x^2-3x-1},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen} x}{2(1+\cos x)\sqrt{\cos x}},\ \text{(c)}\ \frac{2\log(x)}{(2-\log^2(x))x},\ \text{(d)}\ x\operatorname{sen}(\log x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n \geq (n+1)^n/6$. Possono essere utili le proprietà note della successione fondamentale $(1+1/n)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, IBW ☐ e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 6 settembre 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2-2x)\cos x + 6e^{-x}\operatorname{sen} x - (1-2x)\operatorname{sen} 2x}{\big(\log(1-x^2)\big)\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}\operatorname{sen} x + 2\cos x) - 3(1+x^2)\arctan x}{x\sqrt{e^{x^2}-1}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n+1)!}{(n+1)!\cdot n^{2n}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{x^4-6x^2-3} - \dfrac{1}{8}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi (gli zeri si trovano con Ruffini); **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (si scompone facilmente); **d)** f'', intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x-1}{x^3-x^2-3x-1},\ \text{(b)}\ \frac{\cos(\log x)}{\big(1+\operatorname{sen}^2(\log x)\big)x},\ \text{(c)}\ \frac{4\log x}{(1+2\log^2 x)x},\ \text{(d)}\ x\cos(\log x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza $1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n \geq (n+1)^n/3$. Possono essere utili le proprietà note della successione fondamentale $(1+1/n)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6.