Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 25 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^{-x}+e^{2x})-4(x+1)^{3/2}+4\cos x}{x\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{7\log(1+x^2)-2(x^2+1)e^{-2x}+2\cos x-4\operatorname{sen} x\cos 2x}{(\cos 3x-\cos x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1-e\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** $f''(x)$, dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+2x+1}{(x-1)(x^2-2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}(1+\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{1-2\tan x},\ \text{(d)}\ (1-x)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-2\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $\log(1+n^n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, $(n+1)^n$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, n^{n+1}.

6. Poniamo $X := \left\{\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n - 2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X=-1/e$ e che $\inf X=-6$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0:=0$, $F_1:=1$, $F_{n+2}:=F_n+F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $b_n := F_0+F_2+F_4+\cdots+F_{2n-2}+F_{2n}$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $b_{n+3}=4b_{n+2}-4b_{n+1}+b_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $b_n=F_{2n-1}-1$ per ogni $n\geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 25 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^{2x}-2e^x)+2(x+1)^{3/2}-2\cos x}{x\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(2x^2-1)e^x+\log(1-2x)+2\cos x+2\operatorname{sen}2x\cos x}{(\cos x-\cos(4x))\big(1-\sqrt{1+x}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{|2x-1|}{(x+1)^2}}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** $f''(x)$, dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x\big(1+\cos^2(\log x)\big)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 2x}{1-\tan 2x},\ \text{(d)}\ (x-1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, n^{n+1}, $\log(1+n^n)$, $\operatorname{sen}(1/n)$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $(n+1)^n$.

6. Poniamo $X := \left\{2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n-\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X=e$ e che $\inf X=0$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0:=0,\ F_1:=1,\ F_{n+2}:=F_n+F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $c_n := F_0-F_1+F_2-F_3+\cdots+(-1)^{2n-1}F_{2n-1}+(-1)^{2n}F_{2n}$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $c_{n+3}=4c_{n+2}-4c_{n+1}+c_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $c_n=F_{2n-1}-1$ per ogni $n\geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 25 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1-x)^{3/2} + 3x(3e^{-x} - e^{x}) - 4\cos x}{x\sqrt{1-\exp(-x^2)}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(2x^2-1)e^{-x} + \log(1+x^2) + 2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x\cos x}{\big(1-\sqrt{1-x}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} - 1\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n^2)!}{n^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{|2x+1|}{(x-1)^2}}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** $f''(x)$, dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4 - x^3 + 3}{(x+2)(x^2+2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\cos(\log x)}{x\big(1+\operatorname{sen}^2(\log x)\big)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{3+\tan x},\ \text{(d)}\ (x+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1+\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2} - \sqrt{n^3+n^2}$, $(n+1)^n$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $\log(1+n^n)$, n^{n+1}, $\operatorname{sen}(1/n)$.

6. Poniamo $X := \left\{\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} - 2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n} : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 0$ e che $\inf X = -e$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $d_n := F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + (-1)^{n-1}F_{n-1} + (-1)^n F_n$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $d_{n+3} = 2d_{n+1} - d_n$ per ogni $n \geq 0$, nonché la relazione $d_n = (-1)^n F_{n-1} - 1$ per ogni $n \geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 25 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - (x^2+2)e^x - 6\log(1-x^2) + 2\operatorname{sen} x \cos 2x}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)(\cos x - \cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(1+x)^{3/2} + 3x(e^{-x} - 2e^x) - 2\cos 2x}{x\sqrt{e^{x^2}-1}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2)!}{n^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{|x-1|}}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** $f''(x)$, dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x-3}{(x-2)(x^2+2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\tan x}{1+\log^2(\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{1-3\tan x},\ \text{(d)}\ (x+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+4-\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\log(1+n^n)$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, n^{n+1}, $\operatorname{sen}(1/n)$, $(n+1)^n$, $\sqrt[n]{1+n^n}$.

6. Poniamo $X := \left\{2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 6$ e che $\inf X = 1/e$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti dalla teoria sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Indichiamo con F_n la nota successione di Fibonacci $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$. Definiamo la successione così definita per ricorrenza: $a_n := F_0 + F_1 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n}$. Dimostrare per induzione che vale la relazione $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n$ per ogni $n\geq 0$, nonché la relazione $a_n = F_{2n+2} - 1$ per ogni $n\geq 0$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.