Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 4 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + x(e^{-x} + \operatorname{sen} x + \cos x)}{\cos(x^2) - \exp(-x^3)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left((2x^2 \log\Big(\frac{x^3}{x^3+x^2}\Big) - (x^2+x)\log\Big(\frac{x^2-x}{x^2+x}\Big)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\cos(x-x^2) - 4(x+1)^{3/2} + 3(e^{-x}+e^x)x}{x - \sqrt{\log(1+x^2)}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n!)^n}{\big(n+1\big)^{n!}}$

2. Data la funzione $f(x) := (7-2x^3)\sqrt{|4x+7|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f si indovina facilmente); **d)** f'', dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4-2x-1}{x^3-2x^2+2x}, \quad \text{(b) } \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}(1+4\tan x)}, \quad \text{(c) } \frac{3\log x}{x\sqrt{1-9\log^4 x}}, \quad \text{(d) } x^5 e^{x^2/3}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{4x-x^3}{x^2-4+2\sqrt{2-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{2-x^2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $n^2/\log n$, $(2n)!/n!$, $\big(n^2-\sqrt{n^4-n^3}\big)$, e^{-n^2}, $\log(n!)$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, n^3, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } (\cos x)\log(1-x) \text{ di ordine 3}, \quad \text{(b) } \frac{\cos x}{1+2x} \text{ di ordine 3}, \quad \text{(c) } \frac{\log(1+x)}{2+3x^3} \text{ di ordine 6.}$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $b_0=0,\ b_1=2,\ b_2=1,\ b_{n+3}=2b_{n+2}+9b_{n+1}-18b_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la relazione $3^{n-2}\leq b_n\leq 3^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 4 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1-x)^{3/2} - 4\cos(x^2+x) + 3(e^{-x}+e^{x})x}{x - \sqrt{\log(1+x^2)}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left((x^2-2x)\log\left(\frac{x^2-x}{x^2+x}\right) + x^2 \log\left(\frac{x^3}{x^3-2x^2}\right)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(n!)^n}{\big(1+n\big)^{n!}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + x(\cos x - e^{-x} - \operatorname{sen} x)}{\exp(-x^3) - \cos(x^2)}$

2. Data la funzione $f(x) := x\sqrt{|2x^3-5|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f si indovina facilmente); **d)** f'', dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4-x+1}{x^3+2x^2+2x}, \quad \text{(b) } \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}(1+\tan x)}, \quad \text{(c) } \frac{\log(x)}{x\sqrt{1-\big(1+\log^2 x\big)^2}}, \quad \text{(d) } e^{2x^2}x^5$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+1+2\sqrt{x^2-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x^2-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: n^3, $n^2/\log n$, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$, $\big(n^2-\sqrt{n^4-n^3}\big)$, e^{-n^2}, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $(2n)!/n!$, $\log(n!)$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } (\operatorname{sen} x)\log(1-x) \text{ di ordine 3}, \quad \text{(b) } \frac{\cos 2x}{1+x} \text{ di ordine 3}, \quad \text{(c) } \frac{\log(1+2x)}{3+x^3} \text{ di ordine 6.}$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $c_0=-2$, $c_1=-1$, $c_2=1$, $c_{n+3}=2c_{n+2}+9c_{n+1}-18c_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la relazione $-3^{n-1}\leq c_n\leq 3^{n+1}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 4 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(1-x)^{3/2} - 2\cos(x^2+x) + 3\big(2-e^{-x}\big)^2 x}{x + \sqrt{\log(1+x^2)}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left((x^2+x)\log\Big(\frac{x^2+2x}{x^2+3x}\Big) + x^2 \log\Big(\frac{x^3}{x^3-x^2}\Big)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x) - \mathrm{sen}\,x + x(\mathrm{sen}\,x - \cos x - e^x)}{\exp(x^3) - \cos(x^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{\big(1+n\big)^{n!}}{(n!)^n}$

2. Data la funzione $f(x) := x\sqrt{|2x^3+5|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f si indovina facilmente); **d)** f'', dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2},\ \text{(b)}\ \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}(1+2\tan x)},\ \text{(c)}\ \frac{4\log x}{x\sqrt{1-16\log^4 x}},\ \text{(d)}\ x^5 e^{3x^2}$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+1-2\sqrt{x^2-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x^2-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $n^2/\log n$, n^3, $\log(n!)$, $(2n)!/n!$, $\big(n^2-\sqrt{n^4-n^3}\big)$, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$, e^{-n^2}.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ (\mathrm{sen}\,x)\log(1-x)\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{\mathrm{sen}\,x}{1+2x}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\log(1+3x)}{2+x^3}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $d_0=2,\ d_1=1,\ d_2=0,\ d_{n+3}=2d_{n+2}+9d_{n+1}-18d_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale la relazione $-3^{n+1}\leq d_n\leq 3^{n-1}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2017/2018

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica, ☐ IBW, ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 4 luglio 2018

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left((x^2-x)\log\Big(\frac{x^2-x}{x^2+x}\Big)+x^2\log\Big(\frac{x^3}{x^3-2x^2}\Big)\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\cos(x-x^2)-2(x+1)^{3/2}+3\big(2-e^x\big)^2x}{x+\sqrt{\log(1+x^2)}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)+x(e^x-\operatorname{sen}x-\cos x)}{\cos(x^2)-\exp(x^3)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\big(n+1\big)^{n!}}{(n!)^n}$

2. Data la funzione $f(x) := (2x^3+7)\sqrt{|4x-7|}$, trovare **a)** dominio, continuità, segno, limiti agli estremi ed eventuali asintoti; **b)** studiare la derivabilità e calcolare $f'(x)$ dove esiste; **c)** studiare la crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f si indovina facilmente); **d)** f'', dove esiste, e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+2x+3}{x^4-2x^3+2x^2},\ \text{(b)}\ \frac{1+\tan^2x}{2(1+\tan x)\sqrt{\tan x}},\ \text{(c)}\ \frac{\log x}{x\sqrt{1-\big(1-\log^2x\big)^2}},\ \text{(d)}\ e^{x^2/2}x^5$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{x^3+x}{3-x^2+2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{1-x^2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\big(n^2-\sqrt{n^4-n^3}\big)$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^3}$, $n^2/\log n$, n^3, $\log(n!)$, e^{-n^2}, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$, $(2n)!/n!$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ (\cos x)\log(1+x)\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen}2x}{1+x}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\log(1+x)}{3+2x^3}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+3}=2a_{n+2}+9a_{n+1}-18a_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq1$ vale la relazione $3^{n-2}\leq a_n\leq 3^n/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.