Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 24 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^x+e^{-x})-4(x+1)^{3/2}+4\cos 2x}{x\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(x^2-2)+4\log(1+x^2)+2\cos x+4\operatorname{sen} x\cos 2x}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)(\cos 3x-\cos x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(1-e\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := (1-x)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x-1}}$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f' fuori dagli estremi del dominio, crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** decidere la derivabilità nei punti estremi del dominio di f; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+2x+1}{(x-1)(x^2-2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}(1+\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{1-2\tan x},\ \text{(d)}\ (1-x)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-2\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $\log(1+n^n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, $(n+1)^n$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, n^{n+1}.

6. Poniamo $X := \left\{\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n - 2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X=-1/e$ e che $\inf X=-6$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n+1}{2^{n+1}}+\dfrac{n+2}{2^{n+2}}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}+\dfrac{2n}{2^{2n}} = \big(2^n(n+2)-2-2n\big)4^{-n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 24 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1-x)^{3/2}+3x(e^{-x}+e^{x})-4\cos x}{x\sqrt{1-\cos x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x}(2x^2-1)+2\log(1-x^2)+2\cos x+\operatorname{sen} 2x\cos x}{(\cos x-\cos 3x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)$

2. Data la funzione $f(x) := (1-x)\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2x-1}}$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f' fuori dagli estremi del dominio, crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** decidere la derivabilità nei punti estremi del dominio di f; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x\big(1+\cos^2(\log x)\big)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 2x}{1-\tan 2x},\ \text{(d)}\ (x-1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1-\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, n^{n+1}, $\log(1+n^n)$, $\operatorname{sen}(1/n)$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $(n+1)^n$.

6. Poniamo $X := \left\{2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n}-\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = e$ e che $\inf X = 0$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 0$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}+\cdots+\dfrac{2n}{2^{2n}}+\dfrac{2n+1}{2^{2n+1}} = 2^{-2n-1}\big(2^{n+2}(n+1)-2n-3\big)$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 24 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^{-x}+e^{x}) - 2(4+x)^{3/2} + 16\cos x}{x\sqrt{1-e^{-x^2}}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{9\log(1+x^2) - 2e^{-x}(2x^2+1) + 2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x\cos x}{\big(1-\sqrt{1-x}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} - 1\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := (x+1)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x+1}}$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f' fuori dagli estremi del dominio, crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** decidere la derivabilità nei punti estremi del dominio di f; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-x^3+3}{(x+2)(x^2+2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\cos(\log x)}{x\big(1+\operatorname{sen}^2(\log x)\big)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{3+\tan x},\ \text{(d)}\ (x+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+1+\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, $(n+1)^n$, $\sqrt[n]{1+n^n}$, $\log(1+n^n)$, n^{n+1}, $\operatorname{sen}(1/n)$.

6. Poniamo $X := \left\{\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1} - 2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 0$ e che $\inf X = -e$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n-1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2n-1}} + \dfrac{2n}{2^{2n}} = 2^{1-2n}\big((2^{n+1}-1)n-1\big)$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 24 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x(x^2-2)-4\log(1-x^2)+2\cos 2x+2\operatorname{sen} x\cos 2x}{(\cos x-\cos 2x)\big(1-\sqrt{1+x}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(1+x)^{3/2}+3x(e^{-x}-2e^x)-2\cos 2x}{x\sqrt{e^{x^2}-1}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := (x-1)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x-1}}$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f' fuori dagli estremi del dominio, crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** decidere la derivabilità nei punti estremi del dominio di f; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x-3}{(x-2)(x^2+2x+2)},\ \text{(b)}\ \frac{\tan x}{1+\log^2(\cos x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{1-3\tan x},\ \text{(d)}\ (x+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+4-\sqrt{x+2}}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\log(1+n^n)$, $1/\operatorname{sen}^2(1/n)$, $\sqrt{n^3-n^2+2}-\sqrt{n^3+n^2}$, n^{n+1}, $\operatorname{sen}(1/n)$, $(n+1)^n$, $\sqrt[n]{1+n^n}$.

6. Poniamo $X := \left\{2\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^{n+1}-\left(1+\dfrac{1}{|n|}\right)^n : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 6$ e che $\inf X = 1/e$, stabilendo se sono anche massimo e minimo, usando i risultati noti sulla monotonia delle successioni fondamentali.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}+\dfrac{2n}{2^{2n}} = (n+1)(2^n-1)2^{1-2n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.