Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 6 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^{-x}+e^{x})+4\cos(x-x^2)-4(1+x)^{3/2}}{x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - x^4}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4xe^{x}-7\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)+2\cos 2x+(2-x)(\operatorname{sen} x-\cos x)}{\tan x-\operatorname{sen} x\cos x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left((x^4+x^3)\operatorname{sen}\Big(\frac{1}{x+1}\Big)-x^4\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{2n}\cdot n!}{(3n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := 2x^3 - 3\log\left|\frac{2x+3}{3}\right|$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f' si trova facilmente); **d)** dimostrare che f si annulla in esattamente 3 punti; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4-2x-1}{x^3-3x^2+2x},\ \text{(b) } \frac{8x\big(1+\tan^2(x^2)\big)}{1+16\tan^2(x^2)},\ \text{(c) } \frac{6\log x}{x\sqrt{1-9\log^4 x}},\ \text{(d) } x\log^2(1-x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{4x-x^3}{x^2-4+3\sqrt{2-x^2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{2-x^2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $n^2/\log n$, $(2n)!/n!$, $\big(\sqrt{n^3-n}-\sqrt{n^3+n}\big)$, n^3, $\log(n!)$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^2}$, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } (\cos x)\log(1-x) \text{ di ordine 3},\quad \text{(b) } \frac{\cos x}{1+2x} \text{ di ordine 3},\quad \text{(c) } \frac{\log(1+x)}{2+3x^3} \text{ di ordine 6.}$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $b_0=0$, $b_1=1$, $b_{n+2}=b_{n+1}-2b_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|b_n|\le 2^n$, $b_{n+3}=-b_{n+1}-2b_n$, $|b_n|\le (5/3)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 6 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1-x)^{3/2} - 4\cos(x^2+x) + 3x(e^{-x}+e^{x})}{x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - x^3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} 2x + \cos x)(1+x) - xe^{2x} - 2\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x - \tan x}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot n^{2n}}{(3n)!}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - (x^4 - x^3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-1} \right)$

2. Data la funzione $f(x) := x^3 - 8 + 12\log|x-3|$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f' si trova facilmente); **d)** dimostrare che f si annulla in esattamente 3 punti; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x},\ \text{(b)}\ \frac{6x^2\big(1+\tan^2(x^3)\big)}{1+4\tan^2(x^3)},\ \text{(c)}\ \frac{2\log x}{x\sqrt{1-\big(1+\log^2 x\big)^2}},\ \text{(d)}\ x\log^2(x+1)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 1 + 3\sqrt{x^2-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: n^3, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$, $\big(\sqrt{n^3-n} - \sqrt{n^3+n}\big)$, $n^2/\log n$, $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^2}$, $(2n)!/n!$, $\log(n!)$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ (\operatorname{sen} x)\log(1-x)\ \text{di ordine 3},\quad \text{(b)}\ \frac{\cos 2x}{1+x}\ \text{di ordine 3},\quad \text{(c)}\ \frac{\log(1+2x)}{3+x^3}\ \text{di ordine 6}.$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_{n+2} = -c_{n+1} - 2c_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|c_n| \leq 2^n$, $c_{n+3} = -c_{n+1} + 2c_n$, $|c_n| \leq (5/3)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 6 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(1-x)^{3/2} - 2\cos(x+x^2) + 3x(2-e^{-x})^2}{x\sqrt{x^3 + 2\operatorname{sen}^2 x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - xe^{-x} - \cos x + (1-x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\tan 2x - 2\operatorname{sen} x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left((x^4 - x^3)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) - x^4 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n)!}{n!\cdot n^{2n}}$

2. Data la funzione $f(x) := x^3 + 8 - 12\log|x+3|$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f' si trova facilmente); **d)** dimostrare che f si annulla in esattamente 3 punti; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4+x^2+1}{x^3+3x^2+2x}, \quad \text{(b) } \frac{4x\big(1+\tan^2(x^2)\big)}{1+4\tan^2(x^2)}, \quad \text{(c) } \frac{8\log(x)}{x\sqrt{1-16\log^4 x}}, \quad \text{(d) } x\log^2(x+2)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3 - x}{x^2 - 3 + \sqrt{x^2-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n^2}$, n^3, $\log(n!)$, $(2n)!/n!$, $\big(\sqrt{n^3-n} - \sqrt{n^3+n}\big)$, $1/\big(1-\cos(1/n)\big)$, $n^2/\log n$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } (\operatorname{sen} x)\log(1-x) \text{ di ordine 3}, \quad \text{(b) } \frac{\operatorname{sen} x}{1+2x} \text{ di ordine 3}, \quad \text{(c) } \frac{\log(1+3x)}{2+x^3} \text{ di ordine 6.}$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_{n+2} = -d_{n+1} - 2d_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|d_n| \leq 2^n$, $d_{n+3} = -d_{n+1} + 2d_n$, $|d_n| \leq (5/3)^n$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 6 luglio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-2x} - 5\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - 2\cos x + 2(x+1)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2\tan x - \operatorname{sen} 2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(2-e^x)^2 + 2\cos(x-x^2) - 2(x+1)^{3/2}}{x\sqrt{2x^2 + \operatorname{sen}^2 x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - (x^4 + x^3) \operatorname{sen} \frac{1}{x+1} \right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n)!}{n^{2n} \cdot n!}$

2. Data la funzione $f(x) := 2x^3 + 3\log\left|\frac{2x-3}{3}\right|$, trovare **a)** dominio e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f (uno zero di f' si trova facilmente); **d)** dimostrare che f si annulla in esattamente 3 punti; **e)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 + x^2 - 2x}, \quad \text{(b) } \frac{6x\big(1 + \tan^2(x^2)\big)}{1 + 9\tan^2(x^2)}, \quad \text{(c) } \frac{2\log x}{x\sqrt{1 - \big(1 - \log^2 x\big)^2}}, \quad \text{(d) } x\log^2(x-1)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x^2 + 1 + \sqrt{1-x^2}}\, dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-x^2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\big(\sqrt{n^3 - n} - \sqrt{n^3 + n}\big)$, $\big(1 - \frac{1}{n}\big)^{n^2}$, n^3, $1/\big(1 - \cos(1/n)\big)$, $n^2/\log n$, $\log(n!)$, $(2n)!/n!$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } (\cos x)\log(1+x) \text{ di ordine 3}, \quad \text{(b) } \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+x} \text{ di ordine 3}, \quad \text{(c) } \frac{\log(1+x)}{3 + 2x^3} \text{ di ordine 6.}$$

7. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|a_n| \leq 2^n$, $a_{n+3} = -a_{n+1} - 2a_n$, $|a_n| \leq (5/3)^{n+1}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.