Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 15 febbraio 2017

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e}{(3x^2-2x^3-1)(e^x-e)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2\operatorname{sen} x - \cos x}{\log(2^x - x) - \log(x+3^x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+\log(x+e^x)} - \sqrt{x^2+2x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2-x}} - \sqrt{x^2+2x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\log(x^2+x)+\sqrt{\log x}} - \sqrt{2\log x}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{(x-4x^2)(2x^2-3x^5-x^4)}{(2x^3-x^2+1)(x-3)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{11x^5-3x^6-(2x-3x^2)(x^4-3x^3)}{(x^3-x)(2x^3+x-1)-x^2(2x^4+1)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-\sqrt{x^2+x+2}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}\right)^x$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\log(x^2)}{x+|3x^2+x|}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{x^2-2x^3}}{\cos x - \sqrt{\cos x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{2x^3-5x^2+4x-1}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x+\log(3^x+2^x)}{x^3+\sqrt{x^6-2x^4}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)}\right)^{x\log x}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{x}{2}+\frac{5}{12(2x+1)}+\frac{1}{4}<\frac{4}{3(x-1)}$, (b) $\max\{-x-5,-|2x+7|\}\le -1$, (c) $\displaystyle\sqrt{x-1}\le\frac{2(x-1)}{x}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $b_0=0,\ b_1=1,\ b_{n+2}=b_{n+1}-2b_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|b_n|\le 2^n,\ b_{n+3}=-b_{n+1}-2b_n,\ |b_n|\le(5/3)^n$.

4. Poniamo $X:=\left\{2n/(3+4n+\min\{n+6,-2n\})\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che 4 è l'estremo superiore e -2 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 15 febbraio 2017

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5-9x^6-(2x-3x^2)(3x^4+x^3)}{(x^4-1)(2x^2+x-1)-x^5(2x+1)}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos 3x}{\log(x+2^x)-\log(3^x-x)}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\log(x^2+x)-\sqrt{\log x}}-\sqrt{2\log x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x^2-x)(2x^2-3x^4+x^5)}{(2+3x^3-x)(2x+1)}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+x+2}}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-3x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+\log(e^x+x)}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{(3x-x^3-2)(e^x-e)}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-\log x}{2x+\log x}\right)^{x/\log x}$

k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\left(1+x\right)^{1/x^2}}{x-|2x^2+x|}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-\log(3^x+2^x)}{x^3+\sqrt{x^6-2x^4}}$

m) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sqrt{x^2-2x^3}}{\cos x-\sqrt{\cos x}}$

n) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\log(x+2)}{2x^3+x^2-4x-3}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\dfrac{13}{4}-\dfrac{5}{12(2x-1)}-\dfrac{8}{3(x+1)}<\dfrac{3x}{2}$, (b) $\max\{x-5,-|2x-7|\}\le-1$, (c) $\sqrt{x-2}\le\dfrac{2(x-2)}{x-1}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $a_0=1,\ a_1=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}-2a_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\ge0$ valgono (separatamente) le relazioni $|a_n|\le2^n,\ a_{n+3}=-a_{n+1}-2a_n,\ |a_n|\le(5/3)^{n+1}$.

4. Poniamo $X:=\left\{(2n-1)/(4n+1+\min\{-2n,n+6\})\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che 3 è l'estremo superiore e -1 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2016/2017

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 15 febbraio 2017

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+5x)(-4x^5+x^3+3x)}{(2x^3-x+3)(1-3x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 3}{(e-e^x)(1-2x^3-3x^2)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 3x + \cos x}{\log(2^x - x) - \log(x+e^x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\log(x^3+x) - \sqrt{\log x}} - \sqrt{3\log x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - \log(e^x - 2x)} - \sqrt{x^2+x}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{\frac{x^4}{x^2+2x}}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - 3x^6 + (x^2-2)(3x^4-x^3)}{(x^4-1)(x^2-2x+1) - x^5(x-2)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3-2x^2}\right)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log(x+2)}{\log(x+1)}\right)^{x\log x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x - \sqrt{2x^3+x^2}}{\cos x - \sqrt{\cos x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(x^2)+1}{x - |x-2x^2|}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\log(x^2)}{x^3-5x^2+7x-3}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}\right)^x$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x - \log(3^x+2^x)}{x^3+\sqrt{x^6-3x^4}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{6x+13}{4} + \frac{5}{24x+12} < \frac{8}{3-3x}$, (b) $\max\{x-10, -|2x+1|\} \le -x-4$, (c) $\displaystyle\sqrt{-(x+1)} \le \frac{2(x+1)}{x}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_{n+2} = -d_{n+1} - 2d_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n \ge 0$ valgono (separatamente) le relazioni $|d_n| \le 2^n$, $d_{n+3} = -d_{n+1} + 2d_n$, $|d_n| \le (5/3)^n$.

4. Poniamo $X := \left\{2n/(4n+1+2\min\{n-6,-n\}) \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che 4 è l'estremo superiore e $-2/5$ è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 15 febbraio 2017

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Non sono permessi libri, appunti cartacei, strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+x-1}}\right)^x$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\log(2x+e^x)}-\sqrt{x^2-x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}2x-2\cos x}{\log(x+2^x)-\log(e^x-x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log(x^3+x)+\sqrt{\log x}}-\sqrt{3\log x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-5x^2)(2x-x^5+2x^3)}{(2+x^3-3x^2)(4x-1)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^6-11x^5+(3x-2x^2)(3x^4-x^3)}{(x^4-1)(2x^2+x+1)-x^5(2x+1)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{\frac{x^4}{x^2+2x}}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\log(3^x+2^x)}{x^3+\sqrt{x^6-3x^4}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-3}{(e-e^x)(x^3-3x-2)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+\log x}{2x-\log x}\right)^{x/\log x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1+x\right)^{1/x^2}}{x+|x-2x^2|}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{2x^3+x^2}}{\cos x-\sqrt{\cos x}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\log(x+2)}{3x^3+5x^2+x-1}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{3x+19}{12(x+1)}-\frac{5}{12(2x-1)}<\frac{x}{2}$, (b) $\max\{-x-10,-|1-2x|\}\le x-4$, (c) $\displaystyle\sqrt{-(x+2)}\le\frac{2(x+2)}{x+1}$.

3. Consideriamo la successione così definita per ricorrenza: $c_0=0$, $c_1=1$, $c_{n+2}=-c_{n+1}-2c_n$. Dimostrare per induzione che per ogni $n\ge0$ valgono (separatamente) le relazioni $|c_n|\le 2^n$, $c_{n+3}=-c_{n+1}+2c_n$, $|c_n|\le(5/3)^n$.

4. Poniamo $X:=\left\{(2n-1)/(4n+1+2\min\{n-6,-n\}) \;:\; n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che 3 è l'estremo superiore e $-1/5$ è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.