Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 26 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x + 3x(e^{-x}+e^{x}) - 4(x+1)^{3/2}}{x^2 \arctan(1/x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\log(x^2+1) - x^2 e^{2x} - 2e^{2x} + 2\cos x + 4\operatorname{sen} x \cos 2x}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)(\cos 3x - \cos x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(1 - e\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x+1}{4-x^2}}$, trovare **a)** dominio, segno, limiti agli estremi; **b)** eventuali simmetrie ed asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo o con tangente verticale di f; **d)** f'', dimostrando che esiste un solo punto di flesso; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+2x+1}{x^3+4x},\ \text{(b)}\ \frac{1+\log 3x}{1+x^2\log^2(3x)},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{\tan x - 2},\ \text{(d)}\ (1-x)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x+2}}{x^2+3x+2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt[n]{n}$, $\log(1+n^n)$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $(2n)^n$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $n^{2n}\}$.

6. Poniamo $X := \left\{(-1)^n - \frac{1}{2^n+2^{-n}} \;\middle|\; n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 3/2$ e che $\inf X = -1$, stabilendo se sono anche massimo e minimo.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 0$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n}{2^n} + \dfrac{n+1}{2^{n+1}} + \cdots + \dfrac{2n}{2^{2n}} + \dfrac{2n+1}{2^{2n+1}} = 2^{-2n-1}\big(2^{n+2}(n+1) - 2n - 3\big)$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 26 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1-x)^{3/2} + 3x(e^{-x}+e^{x}) - 4\cos x}{x^2 \arctan(1/x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(2x^2-1)e^{-x} - 2\log(1+x^2) + 2\cos x - \operatorname{sen} 2x \cos x}{(\cos x - \cos 3x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-4}}$, trovare **a)** dominio, segno, limiti agli estremi; **b)** eventuali simmetrie ed asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo o con tangente verticale di f; **d)** f'', dimostrando che esiste un solo punto di flesso; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4-2x+1}{x^3+4x},\ \text{(b)}\ \frac{3+3\log x}{1+9x^2\log^2 x},\ \text{(c)}\ \frac{1+\tan^2 x}{1-2\tan x},\ \text{(d)}\ (x-1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x-1}}{2x^2-6x+4}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, n^{2n}, $\log(1+n^n)$, $\operatorname{sen}(1/n)$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt[n]{n}$, $(2n)^n$.

6. Poniamo $X := \left\{(-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n+2^{-n}} \;\middle|\; n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 3/2$ e che $\inf X = -1$, stabilendo se sono anche massimo e minimo.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n-1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2n-1}} + \dfrac{2n}{2^{2n}} = 2^{1-2n}\big((2^{n+1}-1)n-1\big)$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 26 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(e^{-x}+e^{x}) - 2(x+4)^{3/2} + 16\cos x}{x^2 \arctan(1/x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-2)e^{-x} - 4\log(1-x^2) + 2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x\cos x}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)(\cos x - \cos 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} - 1\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{2^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{1-x}{4-x^2}}$, trovare **a)** dominio, segno, limiti agli estremi; **b)** eventuali simmetrie ed asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo o con tangente verticale di f; **d)** f'', dimostrando che esiste un solo punto di flesso; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4-x+3}{x^3+4x},\ \text{(b) } \frac{1+\log 2x}{1+x^2\log^2(2x)},\ \text{(c) } \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan x},\ \text{(d) } (x+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $(2n)^n$, $\sqrt[n]{n}$, $\log(1+n^n)$, n^{2n}, $\operatorname{sen}(1/n)$.

6. Poniamo $X := \left\{(-1)^n + \frac{1}{2^n+2^{-n}} \;\middle|\; n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 3/2$ e che $\inf X = -1$, stabilendo se sono anche massimo e minimo.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n}{2^n} + \dfrac{n+1}{2^{n+1}} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2n-1}} + \dfrac{2n}{2^{2n}} = (n+1)(2^n-1)2^{1-2n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 26 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2e^{2x} + 7\log(1+x^2) - 2e^{2x} + 2\cos 2x + 4\operatorname{sen} x\cos x}{(\cos x - \cos 2x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)^{3/2} + 3(e^{-x} - 2e^{x})x - 2\cos 2x}{x^2\arctan(1/x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-4}}$, trovare **a)** dominio, segno, limiti agli estremi; **b)** eventuali simmetrie ed asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo o con tangente verticale di f; **d)** f'', dimostrando che esiste un solo punto di flesso; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4+x-3}{x^3+4x},\ \text{(b) } \frac{2+2\log x}{1+4x^2\log^2 x},\ \text{(c) } \frac{1+\tan^2 x}{1+3\tan x},\ \text{(d) } (x+1)\log^2 x$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+2}}{x^2+3x+2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x+2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\log(1+n^n)$, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, n^{2n}, $\operatorname{sen}(1/n)$, $(2n)^n$, $\sqrt[n]{n}$.

6. Poniamo $X := \left\{(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^n+2^{-n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $\sup X = 1$ e che $\inf X = -3/2$, stabilendo se sono anche massimo e minimo.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale l'uguaglianza $\dfrac{n+1}{2^{n+1}} + \dfrac{n+2}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2n-1}} + \dfrac{2n}{2^{2n}} = \big(2^n(n+2) - 2 - 2n\big)4^{-n}$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.