Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in $\square$ Informatica e $\square$ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta dell'8 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\cos(x-x^2) - 4(x+1)^{3/2} + 3x(e^{-x}+e^x)}{x\sqrt{x^2-x^4}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5xe^x - 9\,\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x) + 2\cos 2x + 2(x-1)(\cos x - \mathrm{sen}\,x)}{\tan x - \mathrm{sen}\,x\cos x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x^3+x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2-4x-4}{2x^2-2x-4}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4+x-1}{x^3-3x^2+2x}, \ \text{(b) } \frac{1-\tan^2 x}{1+(2x-\tan x)^2}, \ \text{(c) } \frac{2\log(x)}{x(2-\log^2(x))}, \ \text{(d) } x\log^2(1-x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{3x^3-2x+x^3\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n \to +\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: e^{-n}, $1/\,\mathrm{sen}(1/n)$, 2^{2^n}, $\sqrt[n]{n}$, 2^{n^2}, $\log(1+n^n)$, $(2n)!$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } e^{x+1}\log(1-x) \text{ di ordine 3,} \quad \text{(b) } \frac{\cos x}{1-2x} \text{ di ordine 3,} \quad \text{(c) } \frac{\log(1-x)}{1-2x^4} \text{ di ordine 6.}$$

7. Dimostrare per induzione su $n \geq 0$ che per ogni $x > -1/(n+1)$ vale la disuguaglianza $(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)(1+(n+1)x) \geq 1+(n+1)(n+2)x/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta dell'8 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4(1-x)^{3/2}-4\cos(x^2+x)+3x(e^{-x}+e^{x})}{x\sqrt{x^2-x^3}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{3^{n^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{5\,\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x)-5xe^{2x}+4\cos x-4(x+1)(\cos 2x-\mathrm{sen}\,x)}{\mathrm{sen}\,x\cos x-\tan x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3-x^2}}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2+4x-4}{x^2-3x+2}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4-3}{x^3-x^2-2x},\ \text{(b) } \frac{3+\tan^2 x}{1+(2x+\tan x)^2},\ \text{(c) } \frac{4\log(x)}{x(1-2\log^2(x))},\ \text{(d) } x\log^2(x+1)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x-4x^3+x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\frac{1}{x^2}-2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\sqrt[n]{n}$, $(2n)!$, 2^{2^n}, e^{-n}, $\log(1+n^n)$, $1/\mathrm{sen}(1/n)$, 2^{n^2}.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } e^{1-x}\log(1-x) \text{ di ordine 3},\quad \text{(b) } \frac{\cos 2x}{1-x} \text{ di ordine 3},\quad \text{(c) } \frac{\log(1+2x)}{1-x^4} \text{ di ordine 6.}$$

7. Dimostrare per induzione su $n\geq1$ che per ogni $x>-1/(n+1)$ vale la disuguaglianza $(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)(1+(n+1)x)\geq 1+\frac{1}{2}(n(n+3))x$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta dell'8 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x)^{3/2}-2\cos(x^2+x)+3x(2-e^{-x})^2}{x\sqrt{x^3+2x^2}}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3+x^2}}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x^3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)-xe^{-x}-\cos x+(1-x)(\operatorname{sen} x+\cos x)}{2\tan x-\operatorname{sen} 2x}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n^2}}{(2n)!}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{x^4-x^2+1}{x^3+3x^2+2x},\ \text{(b) } \frac{1-\tan^2 x}{1+(2x-\tan x)^2},\ \text{(c) } \frac{2\log x}{x(2+\log^2 x)},\ \text{(d) } x\log^2(x+2)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{2}{2x-3x^3+x^3\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: $\log(1+n^n)$, $\sqrt[n]{n}$, 2^{n^2}, $1/\operatorname{sen}(1/n)$, 2^{2^n}, $(2n)!$, e^{-n}.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } e^{x-1}\log(1-x) \text{ di ordine 3,}\quad \text{(b) } \frac{\operatorname{sen} x}{1-2x} \text{ di ordine 3,}\quad \text{(c) } \frac{\log(1+x)}{1-3x^4} \text{ di ordine 6.}$$

7. Dimostrare per induzione su $n\ge 1$ che per ogni $x>-1/n$ vale la disuguaglianza $(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)\ge 1+n(n+1)x/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta dell'8 luglio 2016

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma *non* strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - xe^{-x} - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + (1-x)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\operatorname{sen} 2x - 2\tan x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x-x^2) - 2(x+1)^{3/2} + 3x(2-e^x)^2}{x\sqrt{x^4+2x^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x^3-x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2+4x-4}{2x^2+2x-4}$, trovare **a)** dominio, segno e limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** f', crescenza/decrescenza e punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^4+x+2}{x^3+x^2-2x},\ \text{(b)}\ \frac{2x(1+\tan^2 x)+2\tan x}{1+4x^2\tan^2 x},\ \text{(c)}\ \frac{4\log x}{x(1+2\log^2 x)},\ \text{(d)}\ x\log^2(x-1)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x-4x^3-x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-2}$.

5. Si mettano in ordine le successioni seguenti, in modo che per $n\to+\infty$ la precedente sia "o piccolo" della successiva: 2^{2^n}, $\log(1+n^n)$, $\sqrt[n]{n}$, $(2n)!$, e^{-n}, 2^{n^2}, $1/\operatorname{sen}(1/n)$.

6. Trovare il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ e^{1-x}\log(1+x) \text{ di ordine 3,}\quad \text{(b)}\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{1-x} \text{ di ordine 3,}\quad \text{(c)}\ \frac{\log(1+x)}{1+2x^4} \text{ di ordine 6.}$$

7. Dimostrare per induzione su $n\ge 2$ che per ogni $x > -1/n$ vale la disuguaglianza $(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)\ge 1+(n+2)(n-1)x/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 4+3+2+4, 6, 6, 6, 6.