Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2015/2016

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta dell'8 febbraio 2016

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-x^3)(3x^3+2x^2-x^4)}{(x-2)(1+2x^3+x^2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\sqrt{x^2-x2^{-x}}-x\sqrt{4^x+2^x/x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)^{-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\ln(2+3^x)}-\sqrt{x^2+x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\log x)\left(\sqrt{\log^2 x-2\log x+1}+\log(1/x)\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5-2x^6+(x^2-2)(2x^4-3x^3)}{x^5(2x-1)+(x^2+3)(x^3-2x^4-1)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x^2+2x)^2+x}-\sqrt{x^2+x}\sqrt{x^2+3x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\cos 2x-1}{(x^3+x^2-5x+3)\left(1-\sqrt{x}\right)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{\cos x-\sqrt{2x+1}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-2\left(1+x^2\right)^{1/x}}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(e^x-e)^2}{2x^3-5x^2+4x-1}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}\right)^x$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x-1}{2x^3-x}\right)^{x^2}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}\operatorname{sen}x-\cos x}{\log\left(x^3-\sqrt{x^6-3x^2}\right)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{32}{3(x+1)}-\frac{11}{6(2x-1)}<x+\frac{5}{2}$, (b) $4+\Big||5+4x|+6x\Big|+8x\le0$, (c) $\displaystyle x+\sqrt{\frac{27x}{4x^2-27}}\le0$.

3. Dimostrare per induzione su $n\ge2$ che per ogni $x>-1/n$ vale la disuguaglianza $(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)\ge1+(n+2)(n-1)x/2$.

4. Poniamo $X:=\left\{(2n+1)/(1+8n+2|n+1|)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $1/3$ è l'estremo superiore e $1/7$ è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta dell'8 febbraio 2016

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x^2-x)^2+x}-\sqrt{x+1}\sqrt{x^3-3x^2}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-\ln(3^x+1)}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log^2 x+2\log x}+\log(1/x)-1\right)\log x$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\right)^{-1}$

e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-x^3)(2x^2-3x^4+x^3)}{(2x+1)(2+3x^3-x)}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\sqrt{x^2-4^{-x}}-x\sqrt{4^x-2^x/x}\right)$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5-2x^6+(x^2-2)(2x^4-3x^3)}{(x^2+3)(x^3+2x^4-1)-x^5(2x+1)}$

h) $\lim_{x\to-1}\frac{(1-e^xe)^2}{2x^3+x^2-4x-3}$

i) $\lim_{x\to1}\frac{\cos 2x-1}{(2x^3-3x^2+1)(1-\sqrt{x})}$

j) $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}\operatorname{sen}x-\cos 3x}{\log\left(x^3-\sqrt{x^6-2x^2}\right)}$

k) $\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{2\cos x-\sqrt{4+x}}$

l) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-2x-1}{2x^3-x}\right)^{x^2}$

m) $\lim_{x\to0}\frac{\left(1+x^2\right)^{1/x}-2}{x-\sqrt{x^2-x^3}}$

n) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+x}}\right)^x$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\frac{2x}{3}-\frac{2}{x+1}+\frac{56}{9(3x+1)}>\frac{11}{9}$, (b) $4+\Big|6x-|4x-5|\Big|\le 8x$, (c) $2x+\sqrt{\frac{16x^2-9}{4x^2-2}}\ge 0$.

3. Dimostrare per induzione su $n\ge1$ che per ogni $x>-1/n$ vale la disuguaglianza $(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)\ge 1+n(n+1)x/2$.

4. Poniamo $X:=\left\{(2n-1)/(8n-2|n-1|-1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $1/3$ è l'estremo superiore e $1/7$ è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta dell'8 febbraio 2016

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\cos 2x}{(2x^3+3x^2-1)\operatorname{sen}(x+1)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\sqrt{x^2+x2^{-x}}-x\sqrt{4^x-2^x/x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x^2+x)^2+x}-\sqrt{x^2+2x}\sqrt{x^2-2}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5-2x^6+(x^2-2)(2x^4-3x^3)}{(x^2-1)(x^3+2x^4-1)-x^5(2x+1)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-\ln(2^x+1)}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\log x)\left(2-\log(x)+\sqrt{\log^2 x-4\log x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-\sqrt{x^2+3x}}{2x-\sqrt{x^2-x}}\right)^x$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}\operatorname{sen}x+\cos x}{\log\left(2x^3-\sqrt{4x^6-x^2}\right)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-2\left(1-x^2\right)^{1/x}}{x-\sqrt{x^2-3x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{2\cos x-\sqrt{4-x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(e^x-e)^2}{x^3-5x^2+7x-3}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(5x+x^3)(x^3-4x^4+3x)}{(1-3x)(3+2x^3-x)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x-1}{2x^3-2x}\right)^{x^2}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a) } \frac{5}{x+1}-\frac{23}{9(3x-1)}-\frac{2x}{3}<\frac{5}{9},\ \text{(b) } 4+\Big||5+4x|+6x\Big|+8x\le 0,\ \text{(c) } \sqrt{\frac{x}{3-4x^2}}\le x.$$

3. Dimostrare per induzione su $n\ge1$ che per ogni $x>-1/(n+1)$ vale la disuguaglianza $(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)(1+(n+1)x)\ge 1+(n(n+3))x/2$.

4. Poniamo $X:=\left\{(2n-3)/(8n+2|n-1|-15)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $1/3$ è l'estremo superiore e $1/7$ è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta dell'8 febbraio 2016

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-5x^3)(2x-x^4+2x^3)}{(4x-1)(2+x^3-3x^2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2+\log x-\sqrt{\log^2 x+4\log x}\right)\log x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+\ln(2^x+1)}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x^2-x)^2-x}-\sqrt{x^2-2x}\sqrt{x^2+2}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2)(2x^4-3x^3)+3x^5-2x^6}{(x^2-2)(x^3+2x^4-1)-x^5(2x+1)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2^x\sqrt{x^2+4^{-x}}-x\sqrt{4^x+2^x/x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{(e^x e-1)^2}{3x^3+5x^2+x-1}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\cos 2x}{(x^3-3x-2)\tan(x+1)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}\cos x+\operatorname{sen} x}{\log\left(2x^3-\sqrt{4x^6-2x^2}\right)}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{2-2\cos x}}{\cos x-\sqrt{1-2x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3+2x-1}{2x^3-x}\right)^{x^2}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-x^2\right)^{1/x}-2}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{2x-\sqrt{x^2-x}}\right)^{x}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a) } \frac{11}{4}-\frac{12}{x+1}+\frac{45}{4(2x+1)}>\frac{x}{2},\ \text{(b) } 2+\Big|4x-|2x-3|\Big|\le 4x,\ \text{(c) } \sqrt{\frac{16x^2-9}{4x^2-2}}\ge 2x.$$

3. Dimostrare per induzione su $n\ge 0$ che per ogni $x>-1/(n+1)$ vale la disuguaglianza $(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)(1+(n+1)x)\ge 1+(n+1)(n+2)x/2$.

4. Poniamo $X:=\left\{(1-2n)/(8n-2|n-1|-1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $-1/7$ è l'estremo superiore e $-1/3$ è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.