Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 24 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)e^{2x} + (1-x)\log(1-x) - (x+1)\cos x}{\log\bigl(2-\sqrt{x^2+1}\bigr)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{16(x+1)^{3/2} + 24e^{-x} + 19(x-1)x\operatorname{sen} 2x - 40\cos x}{(\cos 3x - \cos x)\bigl(1-\sqrt{x+1}\bigr)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)}{x\arctan(1/x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2-x^3} - 2x\sqrt{x+1}}$

2. Data la funzione $f(x) := -1 + \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x^2-3}}$, trovare **a)** il dominio e il segno di f; **b)** i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{x^3+6x^2+3x}{x^2+6x+10},\ \text{(b)}\ \frac{4\tan x}{(\cos^2 x)\sqrt{1-4\tan^2 x}},\ \text{(c)}\ \frac{e^{2+\log^2 x}\log x}{x},\ \text{(d)}\ (x-3x^3)e^{-x^2}.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2x-3)\sqrt{2-x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2-x}$.

5. Dimostrare per induzione che $\displaystyle\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{4n-1}{6n}$ per $n \geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 24 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)e^{2x} - 3(x+1)\log(x+1) + (x-1)\cos 2x}{\log\bigl(2-\sqrt{x^2+1}\bigr)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3e^{2x} + 4(1-x)^{3/2} + 11(x-1)x\operatorname{sen} x - 7\cos x}{(\cos x - \cos 3x)\bigl(1-\sqrt{x+1}\bigr)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x/2)}{x\arctan(2/x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)^{1/x}}{\sqrt{x^3+x^2} + x\sqrt{1-x}}$

2. Data la funzione $f(x) := -1 + \sqrt[3]{\dfrac{(1-x)^2}{x^2-3}}$, trovare **a)** il dominio e il segno di f; **b)** i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^3-6x^2-2x}{x^2-6x+10}$, (b) $\dfrac{4\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4\arccos^2 x}}$, (c) $\dfrac{e^{1+2\log^2 x}\log x}{x}$, (d) $(2x^3+x)e^{-2x^2}$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)\sqrt{2x+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{2x+1}$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{n+2}{2n}$ per $n \geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 24 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(x^2+1)e^{-x} + (2x+1)\log(1+2x) + 2(x-2)\cos x}{\log\big(2-\sqrt{1-x^2}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{16(x+1)^{3/2} + 11x(x+2)\operatorname{sen} x + 8(\cos 2x - 3e^x)}{\big(1-\sqrt{1-x}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2-x^3} + 2x\sqrt{x+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x \arctan(2/x)}$

2. Data la funzione $f(x) := 1 - \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x^2-3}}$, trovare **a)** il dominio e il segno di f; **b)** i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^3-6x^2+2x}{x^2-6x+10}$, (b) $\dfrac{4\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4\operatorname{arcsen}^2 x}}$, (c) $\dfrac{e^{1-2\log^2 x}\log x}{x}$, (d) $(x-2x^3)e^{-2x^2}$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{2x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x-1}$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} \geq \dfrac{n+1}{2n}$ per $n \geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 24 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{19x(x+1)\operatorname{sen} 2x - 16(x+1)^{3/2} + 8e^{-x}(5e^x\cos x - 3)}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)e^{-2x} + (1-x)\log(1-x) + (3x-1)\cos x}{\log\big(2-\sqrt{1-x^2}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} 2x}{x\arctan(1/x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x^2)^{-1/x}}{\sqrt{2x^3+x^2} - x\sqrt{x+1}}$

2. Data la funzione $f(x) := 1 - \sqrt[3]{\dfrac{(1-x)^2}{x^2-3}}$, trovare **a)** il dominio e il segno di f; **b)** i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi; **e)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{x^3-6x^2-2x}{x^2+6x+10}$, (b) $\dfrac{4\log(x+1)}{(x+1)\sqrt{1-4\log^2(x+1)}}$, (c) $\dfrac{e^{2-\log^2 x}\log x}{x}$, (d) $(4x^3+x)e^{-x^2}$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2x+1)\sqrt{1-2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-2x}$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{2n+9}{6n}$ per $n \geq 1$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.