Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 10 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi \operatorname{sen} x - 2x \arctan(\frac{1}{x})}{x+1-\sqrt{2x+1}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x - (4x^3-2x)(\operatorname{sen} x + 3\cos x) + 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{e^{x^2-x/2}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n-1)!\cdot(n+1)^n}{n!\cdot n^n (2n)^n}$

2. Data la funzione $f(x) := 5x^2+6x+8\log\left|\dfrac{2-x-x^2}{2}\right|$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** mostrare che f si annulla in esattamente 4 punti; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{4x^3+2x^2-1}{4x^2+4x+5}$, (b) $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+(2x-\tan x)^2}$, (c) $\dfrac{2\log x}{x(2+\log^2 x)}$, (d) $(e^{-x}+e^x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{2}{2x-3x^3+x^3\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2}-1}$.

5. Dimostrare per induzione che $(3n-1)+(3n)+(3n+1)+\cdots+4(n+1) = (n+6)(7n+3)/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 10 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x^3+x)(\operatorname{sen} x - 2\cos x) - 2x^2 e^x - 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi \operatorname{sen} x + 2x \arctan(\frac{1}{x})}{x+1-\sqrt{2x+1}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^3}}{e^{2x^2-2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n!\cdot n^n (2n)^n}{(2n-1)!\cdot (n+1)^n}$

2. Data la funzione $f(x) := 5x^2 - 6x + 8\log\left|\dfrac{x^2-x-2}{2}\right|$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** mostrare che f si annulla in esattamente 4 punti; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a) } \frac{4x^3+x^2-3}{4x^2+4x+5}, \quad \text{(b) } \frac{2x(1+\tan^2 x)+2\tan x}{1+4x^2\tan^2 x}, \quad \text{(c) } \frac{4\log x}{x(1+2\log^2 x)},$$
$$\text{(d) } (e^{-x}-e^x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x-4x^3+x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}-2}$.

5. Dimostrare per induzione che $(3n-3)+(3n-2)+(3n-1)+\cdots+(4n+1) = (n+5)(7n-2)/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 10 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x-x^2)(\operatorname{sen} x - \cos x) - 5x^2 e^{-x} - 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{\operatorname{sen}^2(2x) - 4\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi \operatorname{sen} x + 2x \arctan(\frac{1}{x})}{1 - x - \sqrt{1-2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}{(2n)! \cdot (1+n)^n}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x^2 - x/2}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) := 6x - 5x^2 - 8\log\left|\dfrac{2+x-x^2}{2}\right|$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** mostrare che f si annulla in esattamente 4 punti; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{4x^3+x+3}{4x^2-4x+5}$, (b) $\dfrac{3+\tan^2 x}{1+(2x+\tan x)^2}$, (c) $\dfrac{2\log x}{x(2-\log^2 x)}$, (d) $(e^x - e^{-x})(\operatorname{sen} x + \cos x)$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{3x^3 - 2x + x^3\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^2} - 1}$.

5. Dimostrare per induzione che $(3n-1)+(3n)+(3n+1)+\cdots+(4n+2) = (n+4)(7n+1)/2$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 10 luglio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x-x^2)(\operatorname{sen} x - \cos x) - 4x^2 e^{-x} - 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{\operatorname{sen}^2(2x) - 4\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\arctan(\frac{1}{x}) - \pi \operatorname{sen} x}{1 - x - \sqrt{1-2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x^3}}{e^{-2x^2-2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!\cdot(1+n)^n}{n!\cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}$

2. Data la funzione $f(x) := -5x^2 - 6x - 8\log\left|\dfrac{2-x-x^2}{2}\right|$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di f; **d)** mostrare che f si annulla in esattamente 4 punti; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{4x^3 - x^2 + 4}{4x^2 - 4x + 5}$, (b) $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + (2x - \tan x)^2}$, (c) $\dfrac{4\log x}{x(1 - 2\log^2 x)}$, (d) $(e^{-x} + e^x)(\operatorname{sen} x + \cos x)$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x - 4x^3 - x^3\sqrt{\frac{1}{x^2} - 2}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 2}$.

5. Dimostrare per induzione che $(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)+\cdots+(4n-2) = (n+4)(7n+1)/2$ per $n \geq 3$.

Punti: 4 per ogni limite, 10, 3+3+2+4, 6, 6.