Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 26 giugno 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(e^x+1)^2}{\cos x - \cos 2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{1+x-\sqrt{1+2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\operatorname{sen} x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2-2\cos x}}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n!\cdot 2^{n+1}n^{2n+1}}{(2n)!\cdot(1+n)^n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{e^{x^2-x/2}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{4x+12}{x^2+6x+12}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità e i flessi; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = 8\log\left(\frac{1}{2}|2+x-x^2|\right) + 5x^2 - 4x$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente 4 punti; **e)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le successioni $(2n+1)!/n^n$, n^{-n}, $n\log n$, $(2+\operatorname{sen} n)/n$, $n/(\log n)$, $n!$, $(1+\frac{1}{n^2})^n$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $n\to+\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

(a) $\dfrac{3x^3-2x^2+x}{6x^2+5x+1}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2 x}}$, (c) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\log x)}{2x}$, (d) $(x-1)\log^2(x+1)$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 26 giugno 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(1-x)^{3/2} - 2\cos(x^2+x) + 3x(2-e^{-x})^2}{\cos 2x - \cos x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - 2x^2 e^{-x} - 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{\operatorname{sen}^2(2x) - 4\operatorname{sen}^2 x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(\frac{1}{x}) - \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{1 - x - \sqrt{1-2x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x+1} - (x^2+2x+1)\operatorname{sen} x \cos 2x + 3e^{-x}(1-\cos x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1+x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x^3}}{e^{-2x^2-2x}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!\cdot(1+n)^n}{n!\cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{4x-12}{x^2-6x+12}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = 8\log\left(\frac{1}{2}|2-x-x^2|\right) + 5x^2 + 4x$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente 4 punti; **e)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le funzioni n^{-n}, $(2+\operatorname{sen} n)/n$, $n/(\log n)$, $n\log(n)$, $n!$, $(2n+1)!/n^n$, $(1+\frac{1}{n^2})^n$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $n \to +\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte):

$$\text{(a)}\ \frac{3x^3 - x^2 + 3x}{6x^2 - x - 1},\ \text{(b)}\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arccos^2 x}},\ \text{(c)}\ \frac{\cos(2\log x)}{2x},\ \text{(d)}\ (x+1)\log^2(x+2)\,.$$

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x + x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-\frac{1}{x}}$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 26 giugno 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2-x)(\operatorname{sen} x+\cos x)-x^2e^{-x}-2\operatorname{sen}(1-e^x)}{\operatorname{sen}^2(2x)-4\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})+x\arctan(\frac{1}{x})}{1-x-\sqrt{1-2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x-x^2)-2(x+1)^{3/2}+3x(2-e^x)^2}{\cos 2x-\cos x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x+1)\operatorname{sen} 2x\cos x-2x\sqrt{x+1}-6e^x(1-\cos x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^3}}{e^{2x^2-2x}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n-1)!\cdot(n+1)^n}{n!\cdot n^n(2n)^n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2-2\cos x}}-\frac{1}{x}\right)$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{5x+12}{7x^2+12x+12}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=4x-5x^2-8\log\left(\frac{1}{2}|2+x-x^2|\right)$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente 4 punti; **e)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le funzioni $(2+\operatorname{sen} n)/n$, $n!$, n^{-n}, $n/(\log n)$, $n\log n$, $(1+\frac{1}{n^2})^n$, $(2n+1)!/n^n$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $n\to+\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

$$\text{(a)}\frac{3x^3-2x^2+x}{6x^2+x-1},\ \text{(b)}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2-2\arctan^2 x}},\quad \text{(c)}\frac{\cos(3\log x)}{x},\ \text{(d)}(x+1)\log^2(x-2)\,.$$

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 26 giugno 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x-4x^3)(\operatorname{sen} x + 3\cos x) + x^2 e^x + 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) - x\arctan(\frac{1}{x})}{1+x-\sqrt{1+2x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8\cos(x^2+x) - 8(x+1)^{3/2} + 3x(1+e^{-x})^2}{\cos x - \cos 2x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2+2x+1)\operatorname{sen} x\cos x + 5e^{-x}(1-\cos x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1+x}}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n!\cdot n^n(2n)^n}{(2n-1)!\cdot(n+1)^n}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x^2-x/2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^3}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{12-5x}{7x^2-12x+12}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = -8\log\left(\frac{1}{2}|2-x-x^2|\right) - 5x^2 - 4x$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** mostrare che g si annulla in esattamente 4 punti; **e)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità e flessi (si scompone facilmente); **f)** un grafico di g..

4. Si mettano in ordine le funzioni $n!$, n^{-n}, $n\log n$, $(1+\frac{1}{n^2})^n$, $n/(\log n)$, $(2+\operatorname{sen} n)/n$, $(2n+1)!/n^n$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $n\to+\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte):

(a) $\dfrac{3x^3-2x^2+x}{6x^2-5x+1}$, (b) $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+4\arctan^2 x)}$, (c) $\dfrac{\operatorname{sen}(3\log x)}{x}$, (d) $(x-1)\log^2(x-2)$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x - x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

Punti: 4 per ogni limite, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 26 giugno 2015

Svolgimento

1. a. Il limite

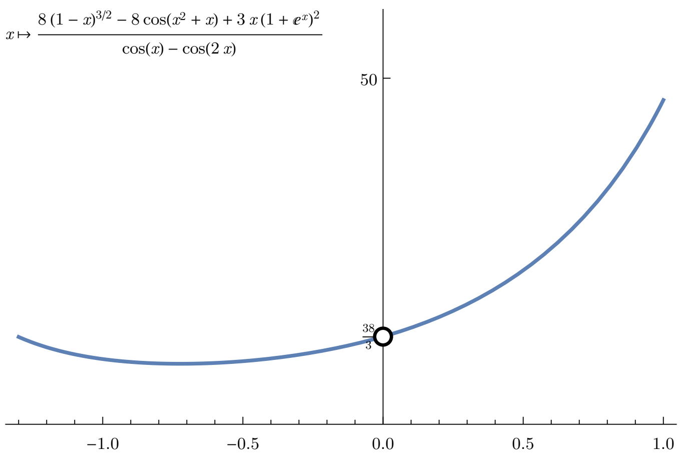
$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(e^x+1)^2}{\cos x - \cos 2x}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Si può tentare di semplificare il denominatore usando il limite notevole $(1-\cos t)t^2 \to 1/2$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{\cos x - \cos 2x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{-(1-\cos x) + (1-\cos 2x)} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{-\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x^2 + \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot (2x)^2} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{-\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot 4}_{\to -1/2+2=3/2}} = \\
&\quad = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Non intravvedendo ulteriori semplificazioni, rimanendo una forma $0/0$ applichiamo L'Hôpital quante volte serve:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&\quad = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{8(3/2)(1-x)^{1/2}(-1) + 8(2x+1)\operatorname{sen}(x^2+x) + 3(1+e^x)^2 + 3x\cdot 2(1+e^x)e^x}{2x} = \\
&\quad = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{-12(1-x)^{1/2} + 8(2x+1)\operatorname{sen}(x^2+x) + 3(1+e^x)^2 + 6x(e^x+e^{2x})}{x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&\quad = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\Big(-12(1/2)(1-x)^{1/2}(-1) + 8\cdot 2\operatorname{sen}(x^2+x) + 8(2x+1)^2\cos(x^2+x) + \\
&\qquad\qquad + 3\cdot 2(1+e^x)e^x + 6(e^x+e^{2x}) + 6x(e^x+2e^{2x})\Big) = \\
&\quad = \frac{1}{3}\Big(6 + 8\cdot 2\cdot 0 + 8(1)^2\cos 0 + 6(1+1)1 + 6(1+1) + 6\cdot 0(1+2)\Big) = \frac{1}{3}(6+8+12+12) = \frac{38}{3}.
\end{aligned}$$



b. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)}$$

si presenta nella forma 0/0. Il denominatore si può tentare di semplificare sfruttando il limite notevole $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 x^2 - \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^2 (2x)^2} = \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^2 \underbrace{\left(4\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 - 4\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^2\right)}_{\to 4-4=0}}.
\end{aligned}$$

Semplificazione fallita. Proviamo a usare l'identità trigonometrica $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(2x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen} 2x)^2} = \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - (2\operatorname{sen} x\cos x)^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x(1-\cos^2 x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4\operatorname{sen}^4 x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4x^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^4} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4x^4}
\end{aligned}$$

Possiamo ora applicare la regola de L'Hôpital quante volte occorre:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{4x^4} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{16x^3}\Big(2(3x^2+1)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + 2(x^3+x)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) - \\
&\qquad - 10xe^x - 5x^2e^x - 6(-e^x)\cos(1-e^x)\Big) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{16x^3}\Big(2(3x^2+1)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + 2(x^3+x)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) - \\
&\qquad - (10x+5x^2)e^x + 6e^x\cos(1-e^x)\Big) \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{48x^2}\Big(12x(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + 2(3x^2+1)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) + \\
&\qquad + 2(2x^2+1)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) + 2(x^3+x)(-\operatorname{sen} x + 3\cos x) - \\
&\qquad - (10+10x)e^x - (10x+5x^2)e^x + 6e^x\cos(1-e^x) + 6e^x(-e^x)\big(-\operatorname{sen}(1-e^x)\big)\Big) =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{48x^2}\Big((12x-2x^3-2x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + 4(3x^2+1)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) -$$
$$- (10+20x+5x^2)e^x + 6e^x\cos(1-e^x) + 6e^{2x}\operatorname{sen}(1-e^x)\Big) \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{96x}\Big((10-6x^2)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + (10x-2x^3)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) +$$
$$+ 4\cdot 6x(\cos x + 3\operatorname{sen} x) + 4(3x^2+1)(-\operatorname{sen} x + 3\cos x) -$$
$$- (20+10x)e^x - (10+20x+5x^2)e^x + 6e^x\cos(1-e^x) + 6e^x(-e^x)\big(-\operatorname{sen}(1-e^x)\big) +$$
$$+ 12e^{2x}\operatorname{sen}(1-e^x) + 6e^{2x}(-e^x)\cos(1-e^x)\Big).$$

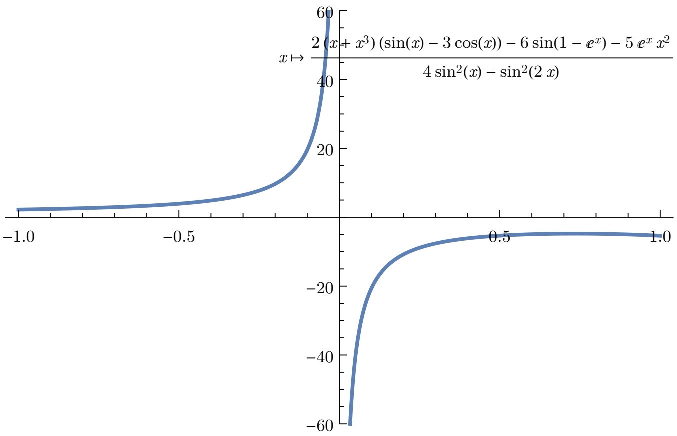
Il numeratore non è più infinitesimo:

$$\lim_{x\to 0}\Big((10-6x^2)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + (10x-2x^3)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) +$$
$$+ 4\cdot 6x(\cos x + 3\operatorname{sen} x) + 4(3x^2+1)(-\operatorname{sen} x + 3\cos x) -$$
$$- (20+10x)e^x - (10+20x+5x^2)e^x + 6e^x\cos(1-e^x) + 6e^x(-e^x)\big(-\operatorname{sen}(1-e^x)\big) +$$
$$+ 12e^{2x}\operatorname{sen}(1-e^x) + 6e^{2x}(-e^x)\cos(1-e^x)\Big) =$$
$$= \Big((10)(-3) + 0 + 0 + 4(1)(3) - (20)1 - (10)1 + 6 + 0 + 0 + 6(-1)1\Big) = -48.$$

Quindi il limite richiesto è della forma $-48/0 = \pm\infty$. Dividiamo nei due casi $x \to 0^\pm$:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{96x}\Big((10-6x^2)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) + (10x-2x^3)(\cos x + 3\operatorname{sen} x) +$$
$$+ 4\cdot 6x(\cos x + 3\operatorname{sen} x) + 4(3x^2+1)(-\operatorname{sen} x + 3\cos x) -$$
$$- (20+10x)e^x - (10+20x+5x^2)e^x + 6e^x\cos(1-e^x) + 6e^x(-e^x)\big(-\operatorname{sen}(1-e^x)\big) +$$
$$+ 12e^{2x}\operatorname{sen}(1-e^x) + 6e^{2x}(-e^x)\cos(1-e^x)\Big) =$$
$$= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{96x}\cdot(-48) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{-1}{2x} = \mp\infty.$$

I due limiti unilaterali sono diversi. Pertanto il limite iniziale non esiste.



c. Nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{1+x-\sqrt{1+2x}}$$

il denominatore tende chiaramente a 0, mentre il numeratore richiede un trattamento speciale perché contiene la frazione $1/x$ che diverge per $x \to 0$. È noto che $\arctan t \to \pm\pi/2$ per $t \to \pm\infty$. Prendiamo i limiti del numeratore a destra e a sinistra:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + x\arctan\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi\cdot 0}{2} + 0\arctan(+\infty) = 0 + 0\cdot\left(+\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + x\arctan\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}(\frac{\pi\cdot 0}{2}) + 0\arctan(-\infty) = 0 + 0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Quindi anche il numeratore tende a 0. Proviamo a semplificare il denominatore sfruttando il prodotto notevole $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b}) = a^2 - b$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{1+x-\sqrt{1+2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{(1+x-\sqrt{1+2x})(1+x+\sqrt{1+2x})}\cdot\overbrace{(1+x+\sqrt{1+2x})}^{\to 1+1=2} = \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{(1+x)^2-(1+2x)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{1+x^2+2x-1-2x} = \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{x^2}.\end{aligned}$$

Vediamo se riusciamo a sfruttare il limite notevole $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$ per $t\to 0$:

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{\pi x/2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{\pi x/2} + \arctan(\frac{1}{x})}{x}.$$

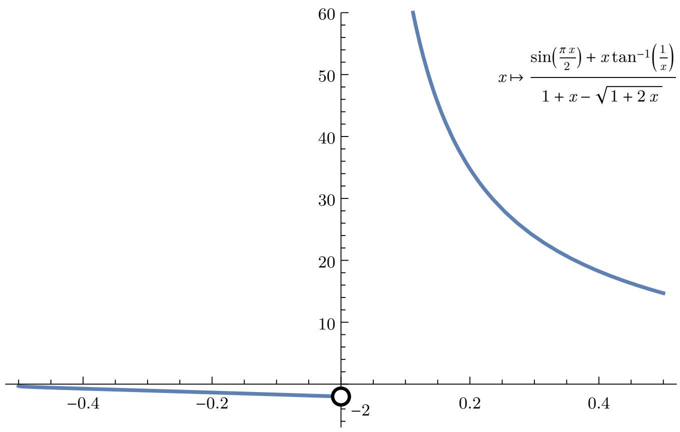
Per $x\to 0^+$ la forma non è più indeterminata:

$$2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{\pi x/2} + \arctan(\frac{1}{x})}{x} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 1 + \arctan(+\infty)}{0^+} = \frac{\frac{\pi}{2} + +\frac{\pi}{2}}{0^+} = +\infty.$$

Per $x\to 0^-$ proviamo ad applicare la regola de L'Hôpital, riprendendo un'espressione precedente, che sembra un poco più agevole:

$$\begin{aligned}2\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + x\arctan(\frac{1}{x})}{x^2} &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} 2\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2}) + \arctan(\frac{1}{x}) + x\cdot\frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{2x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2}) + \arctan(\frac{1}{x}) - \frac{x}{1+x^2}}{x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot(-\frac{1}{x^2}) - \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{1} = \\ &= \lim_{x\to 0^-}\Big(-\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Big) = 0-1-1 = -2.\end{aligned}$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Il limite di partenza non esiste.



d. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}$$

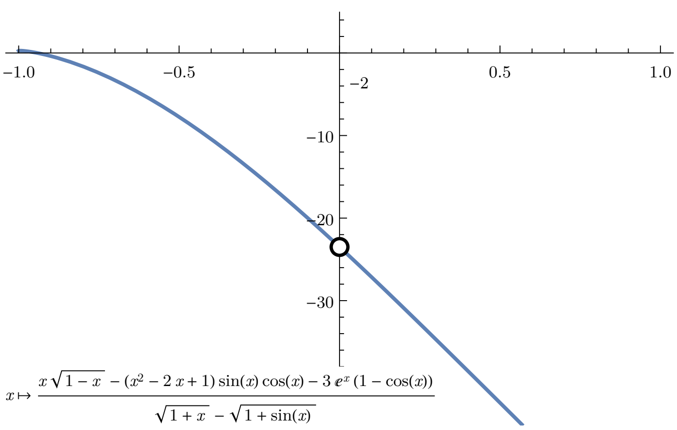
si presenta nella forma indeterminata 0/0. Si può tentare di semplificare il denominatore usando il prodotto notevole $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\mathrm{sen}\,x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\mathrm{sen}\,x}\right)} \cdot \overbrace{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\mathrm{sen}\,x}\right)}^{\to 1+1=2} = \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{(1+x)-(1+\mathrm{sen}\,x)} = \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{x-\mathrm{sen}\,x}.
\end{aligned}
$$

Applichiamo la regola de L'Hôpital quante volte serve:

$$
\begin{aligned}
&2\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 3e^x(1-\cos x)}{x-\mathrm{sen}\,x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x}\Big((1-x)^{1/2} + x(1/2)(1-x)^{-1/2}(-1) - \frac{1}{2}2(x-1)\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{2}(x-1)^2 2\cos 2x - \\
&\qquad - 3e^x(1-\cos x) - 3e^x\,\mathrm{sen}\,x\Big) = \\
&= 2\lim_{x\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\to 1/2} \cdot \frac{1}{x^2}\Big((1-x)^{1/2} - \frac{1}{2}x(1-x)^{-1/2} - (x-1)\,\mathrm{sen}\,2x - (x-1)^2\cos 2x - \\
&\qquad - 3e^x(1-\cos x + \mathrm{sen}\,x)\Big) = \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\Big((1-x)^{1/2} - \frac{1}{2}x(1-x)^{-1/2} - (x-1)\,\mathrm{sen}\,2x - (x-1)^2\cos 2x - \\
&\qquad - 3e^x(1-\cos x + \mathrm{sen}\,x)\Big) \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\Big(\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-1) - \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}x(-1/2)(1-x)^{-3/2}(-1) - \\
&\qquad - \mathrm{sen}\,2x - (x-1)2\cos 2x - 2(x-1)\cos 2x - (x-1)^2(-2\,\mathrm{sen}\,2x) - \\
&\qquad - 3e^x(1-\cos x + \mathrm{sen}\,x) - 3e^x(\mathrm{sen}\,x + \cos x)\Big) = \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(-(1-x)^{-1/2} - \frac{1}{4}x(1-x)^{-3/2} - \\
&\qquad - \mathrm{sen}\,2x - 4(x-1)\cos 2x + 2(x-1)^2\,\mathrm{sen}\,2x - \\
&\qquad - 3e^x(1+2\,\mathrm{sen}\,x)\Big) \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{1}\Big(-(-1/2)(1-x)^{-3/2}(-1) - \frac{1}{4}(1-x)^{-3/2} - \frac{1}{4}x(-3/2)(1-x)^{-5/2}(-1) - \\
&\qquad - 2\cos 2x - 4\cos 2x - 4(x-1)(-2\,\mathrm{sen}\,2x) + 4(x-1)\,\mathrm{sen}\,2x + 2(x-1)^2 2\cos 2x - \\
&\qquad - 3e^x(1+2\,\mathrm{sen}\,x) - 3e^x(2\cos x)\Big) = \\
&= 2\Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 - 2 - 4 - 0 + 0 + 4 - 3 - 6\Big) = -\frac{47}{2}.
\end{aligned}
$$



e. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{2-2\cos x}}\right)$$

si presenta nella forma $\pm\infty-\infty$. La quantità sotto radice $2-2\cos x$ è >0 quando x non è un multiplo di 2π, per cui il limite ha senso sia per $x\to 0^+$ che per $x\to 0^-$. Nel limite da sinistra la forma non è indeterminata:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{2-2\cos x}}\right)=\frac{1}{0^-}-\frac{1}{0^+}=-\infty-\infty=-\infty.$$

Per calcolare il limite da destra facciamo denominatore comune, trasformando la differenza in un rapporto, e poi cerchiamo di semplificare il denominatore sfruttando il limite notevole $(1-\cos t)/t^2\to 1/2$ per $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{2-2\cos x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x\sqrt{2-2\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x\sqrt{2x^2\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x\sqrt{2x^2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}}_{\to\sqrt{1/2}}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x\sqrt{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x^2}.$$

Applicare direttamente L'Hôpital all'ultima espressione porta a complicazioni (forma indeterminata dentro un'altra forma indeterminata). Proviamo ad eliminare la radice anche al numeratore:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2-2\cos x}-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{2-2\cos x}-x\right)\left(\sqrt{2-2\cos x}+x\right)}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-2\cos x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^2\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}+x}=$$

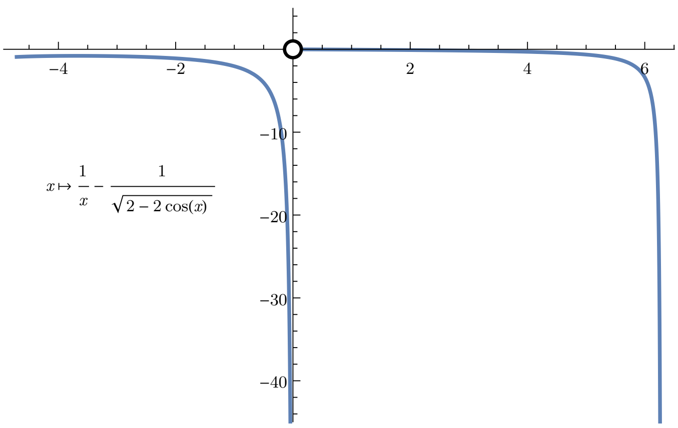
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{2\frac{1-\cos x}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{x\underbrace{\left(\sqrt{2\frac{1-\cos x}{x^2}}+1\right)}_{\to\sqrt{1}+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos x-x^2}{2x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}x-2x}{6x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x-2}{12x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\operatorname{sen}x}{12}=0.$$

I due limiti unilaterali sono diversi. Concludiamo che il limite iniziale non esiste.



f. Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}{(2n)!\cdot(1+n)^n}$$

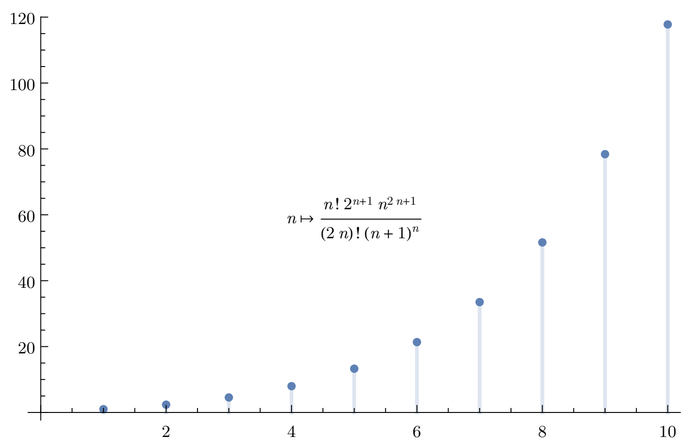
si presenta nella forma ∞/∞. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore cercando degli appaiamenti:

n	$\dfrac{n!\cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}{(2n)!\cdot(1+n)^n}$
1	1,00
2	2,37
3	4,56
4	7,99
5	13,29
6	21,36
7	33,50
8	51,61
9	78,40
10	117,77
11	175,30
12	258,96
13	380,09
14	554,82
15	806,03
16	1166,10
17	1680,83
18	2414,87
19	3459,35
20	4942,58

$$\begin{aligned}
\frac{n!\cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}{(2n)!\cdot(1+n)^n} &= \frac{n!\cdot\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}^{n+1\text{ fattori}}\cdot\overbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}^{2n+1\text{ fattori}}}{\underbrace{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}_{n\text{ fattori}}\cdot n!\cdot\underbrace{(n+1)(n+1)\cdots(n+1)}_{n\text{ fattori}}} = \\
, &= \frac{\overbrace{(2n)\cdot(2n)\cdot(2n)\cdots(2n)}^{n+1\text{ fattori}}\cdot\overbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}^{n\text{ fattori}}}{\underbrace{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}_{n\text{ fattori}}\cdot\underbrace{(n+1)(n+1)\cdots(n+1)}_{n\text{ fattori}}} = \\
&= \frac{\overbrace{(2n)\cdot(2n)\cdot(2n)\cdots(2n)}^{n+1\text{ fattori}}}{\underbrace{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}_{n\text{ fattori}}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\
&= 2n\cdot\frac{\overbrace{(2n)\cdot(2n)\cdot(2n)\cdots(2n)}^{n\text{ fattori}}}{\underbrace{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}_{n\text{ fattori}}}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \\
&= 2n\cdot\underbrace{\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdots\frac{2n}{2n-n+1}}_{\text{tutti fattori }\geq 1}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \geq \\
&\geq 2n\cdot 1\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}.
\end{aligned}$$

L'ultimo membro tende a $+\infty/e = +\infty$. Per il teorema del confronto concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot 2^{n+1} n^{2n+1}}{(2n)!\cdot(1+n)^n} = +\infty.$$



g. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{e^{x^2-x/2}}$$

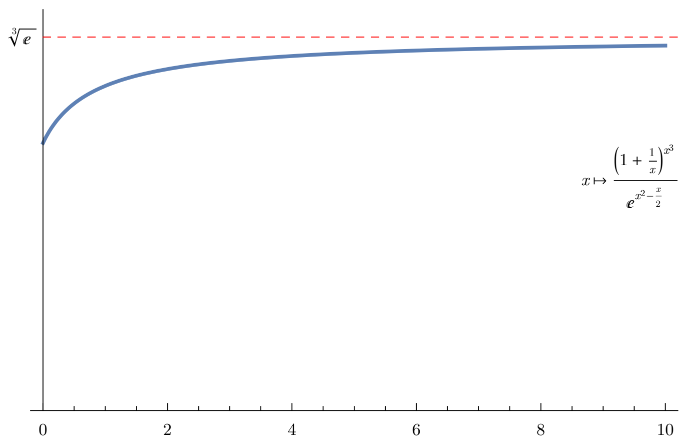
si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Riportiamola a un unico esponenziale e prepariamola per applicare L'Hôpital:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{e^{x^2-x/2}} = \frac{\exp\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{e^{x^2-x/2}} = \frac{\exp\left(x^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{e^{x^2-x/2}} = \exp\left(x^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2-\frac{x}{2}\right)\right) =$$
$$= \exp\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x^3}} = \exp\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}}{x^{-3}}.$$

Dentro all'ultimo esponenziale abbiamo una forma $0/0$. Procediamo con L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{e^{x^2-x/2}} = \lim_{x\to+\infty}\exp\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}}{x^{-3}} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}}{x^{-3}} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^{-2}}{1+\frac{1}{x}}+x^{-2}-2\frac{1}{2}x^{-3}}{-3x^{-4}} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2}{1+\frac{1}{x}}+x^2-x}{-3} =$$
$$= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^3}{x+1}+x^2-x}{-3} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+(x+1)(x^2-x)}{-3(x+1)} =$$
$$= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+x^3-x^2+x^2-x}{-3(x+1)} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{-3x-3} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{-3-\frac{3}{x}} =$$
$$= \exp\frac{1}{3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}.$$

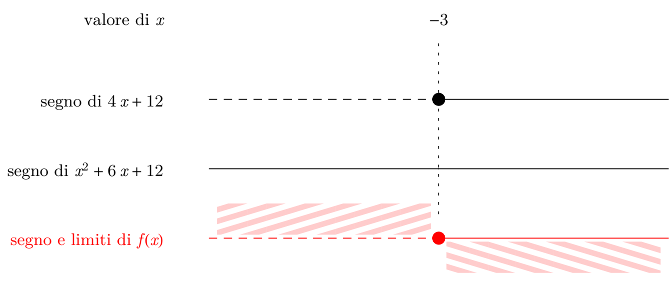
Provate per curiosità a calcolare cosa succederebbe se nell'espressione $e^{x^2-x/2}$ del denominatore del limite di partenza "trascurassimo" l'infinito di ordine inferiore $-x/2$. Oppure se, dopo aver scritto $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3} = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{x^2}$, "sostituissimo" la sottoespressione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ con il suo limite e. O entrambe le cose insieme.



2. a. La funzione

$$f(x) = \frac{4x+12}{x^2+6x+12}$$

è definita dove il denominatore non si annulla. Il discriminante (ridotto) del denominatore è $\Delta/4 = 3^2-12 = -3 < 0$. Quindi il denominatore non si annulla mai, e il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Il segno di f si studia con lo schema seguente:



b. Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$ e i relativi limiti sono:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+12}{x^2+6x+12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4\frac{1}{x}+12\frac{1}{x^2}}{1+6\frac{1}{x}+12\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0^{\pm}.$$

Il segno dei limiti si deduce dallo studio del segno fatto poc'anzi.

c. Dai risultati precedenti deduciamo senza altri calcoli che c'è un asintoto orizzontale all'infinito, che è l'asse x.

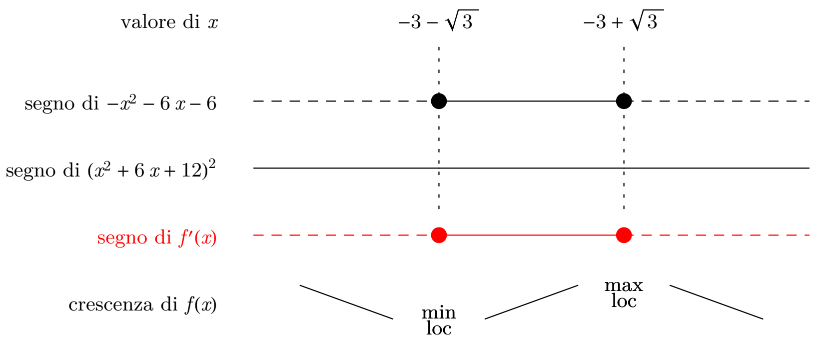
d. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{4(x^2+6x+12)-(4x+12)(2x+6)}{(x^2+6x+12)^2} = 4\frac{x^2+6x+12-(x+3)(2x+6)}{(x^2+6x+12)^2} =$$
$$= 4\frac{x^2+6x+12-2x^2-6x-6x-18}{(x^2+6x+12)^2} = 4\frac{-x^2-6x-6}{(x^2+6x+12)^2}.$$

Il discriminante (ridotto) del numeratore $-x^2-6x-6$ è $\Delta/4 = 3^2-6 = 9-6 = 3$, e quindi $f'(x)$ si annulla per

$$x = \frac{3\mp\sqrt{3}}{-1} = \begin{cases} -3-\sqrt{3} \approx -4{,}7 \\ -3+\sqrt{3} \approx -1{,}3. \end{cases}$$

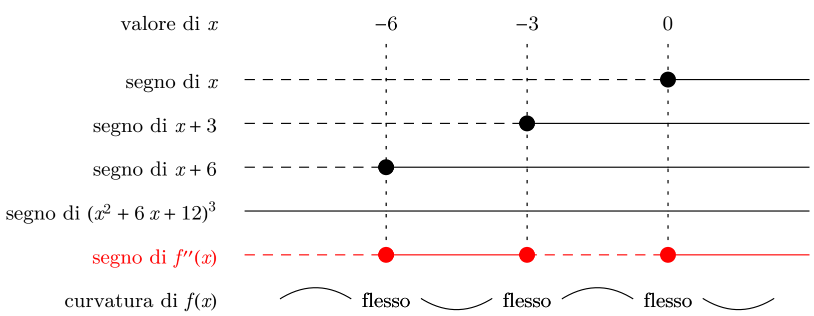
Lo studio del segno di $f'(x)$ e della monotonia di f è nello schema seguente.



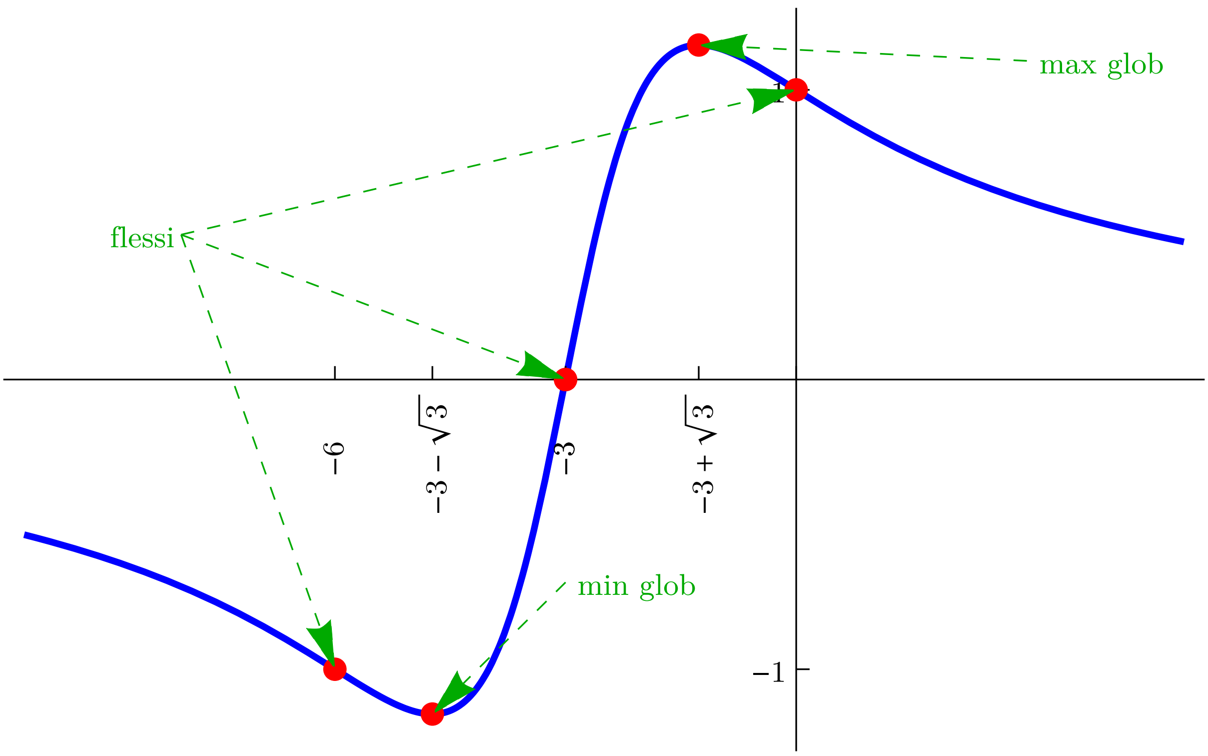
e. Calcoliamo la derivata seconda, senza dimenticare di raccogliere e semplificare i fattori comuni prima di moltiplicare:

$$f''(x) = 4\frac{(-2x-6)(x^2+6x+12)^2-(-x^2-6x-6)2(x^2+6x+12)(2x+6)}{(x^2+6x+12)^4} =$$
$$= 4\frac{-2(x+3)(x^2+6x+12)-4(-x^2-6x-6)(x+3)}{(x^2+6x+12)^3} =$$
$$= 8(x+3)\cdot\frac{-x^2-6x-12-2(-x^2-6x-6)}{(x^2+6x+12)^3} =$$
$$= 8(x+3)\cdot\frac{-x^2-6x-12+2x^2+12x+12}{(x^2+6x+12)^3} =$$
$$= 8(x+3)\cdot\frac{x^2+6x}{(x^2-6x+4)^3} = \frac{8x(x+3)(x+6)}{(x^2+6x+12)^3}.$$

Lo studio del segno di $f''(x)$ e della convessità/concavità di f è come segue:



f. Il grafico di f ha l'aspetto seguente.



3.a. Nella formula della funzione

$$g(x) = 8\log\Big(\frac{1}{2}|2 + x - x^2|\Big) + 5x^2 - 4x$$

l'unica operazione che ha restrizioni è il logaritmo, il cui argomento deve essere > 0:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|2+x-x^2| > 0 \quad &\iff \quad |2+x-x^2| > 0 \quad \iff \quad -x^2+x+2 \neq 0 \quad \iff \\
&\iff \quad x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)2}}{-2} \quad \iff \quad x \neq \frac{-1 \pm 3}{-2} \quad \iff \\
&\iff \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}
\end{aligned}$$

Gli estremi del dominio sono $-\infty, -1, 2, +\infty$. I limiti agli estremi si calcolano così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(8\log\Big(\frac{1}{2}|2+x-x^2|\Big) + 5x^2 - 4x\right) = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{8\log\Big(\frac{1}{2}\overbrace{|2+x-x^2|}^{\to+\infty}\Big)}_{\to+\infty} + \underbrace{x^2\Big(5 - \frac{4}{x}\Big)}_{\to+\infty}\right) = \\
&= +\infty + \infty = +\infty, \\
\lim_{x\to-1} g(x) &= \lim_{x\to-1}\left(\underbrace{8\log\Big(\frac{1}{2}\overbrace{|2+x-x^2|}^{\to0^+}\Big)}_{\to\log 0^+=-\infty} + \underbrace{5x^2-4x}_{\to\text{valore finito}}\right) = \\
&= -\infty - \text{valore finito} = -\infty, \\
\lim_{x\to2} g(x) &= \lim_{x\to2}\left(\underbrace{8\log\Big(\frac{1}{2}\overbrace{|2+x-x^2|}^{\to0^+}\Big)}_{\to\log 0^+=-\infty} + \underbrace{5x^2-4x}_{\to\text{valore finito}}\right) = \\
&= -\infty - \text{valore finito} = -\infty.
\end{aligned}$$

b. Asintoti verticali sono le due rette $x = -1$, $x = 2$. Orizzontali niente. Vediamo se ce ne sono di obliqui:

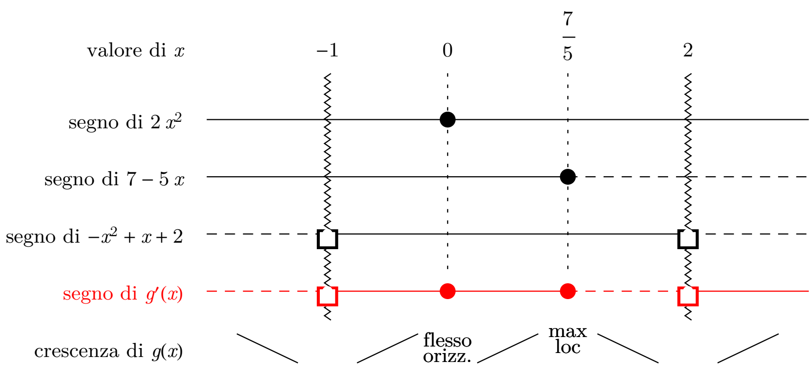
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\left(8\log\Big(\frac{1}{2}|2+x-x^2|\Big) + 5x^2 - 4x\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x}\log\Big(\frac{x^2}{2}|2x^{-2}+x^{-1}-1|\Big) + 5x - \frac{4}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x}\Big(\log x^2 - \log 2 + \log|2x^{-2}+x^{-1}-1|\Big) + 5x - \frac{4}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x}\Big(2\log|x| - \log 2 + \log|2x^{-2}+x^{-1}-1|\Big) + 5x - \frac{4}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(16\frac{\log|x|}{x} + \frac{-\log 2 + \overbrace{\log|2x^{-2}+x^{-1}-1|}^{\to\log|0+0-1|=\log 1=0}}{x} + 5x - \frac{4}{x}\right) = \\ &= 0 + 0 + \infty = +\infty. \end{aligned}$$

Si è usato il limite notevole $(\log|x|)/x \to 0$ per $x \to \pm\infty$. Non ci sono asintoti obliqui.

c. Calcoliamo la derivata, usando il fatto che la derivata di $\log|x|$ è $1/x$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= D\left(8\log\Big(\frac{1}{2}|2+x-x^2|\Big) + 5x^2 - 4x\right) = D\left(8\log|2+x-x^2| - 8\log 2 + 5x^2 - 4x\right) = \\ &= 8\frac{1}{2+x-x^2}\cdot(1-2x) - 0 + 10x - 4 = 2\frac{4(1-2x) + (5x-2)(2+x-x^2)}{2+x-x^2} = \\ &= 2\frac{4 - 8x + 10x + 5x^2 - 5x^3 - 4 - 2x + 2x^2}{2+x-x^2} = 2\frac{-5x^3 + 7x^2}{2+x-x^2} = \\ &= \frac{2x^2(7-5x)}{2+x-x^2}. \end{aligned}$$

Lo studio del segno della derivata è nello schema seguente:

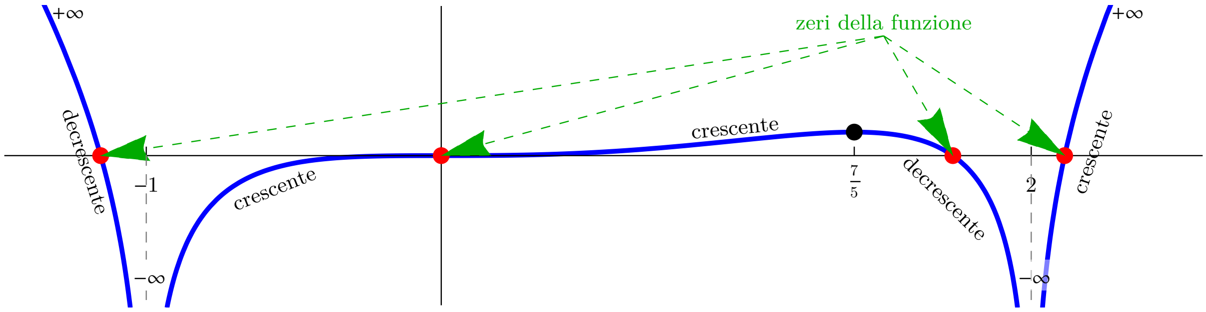


d. Poiché la formula della funzione g mescola polinomi e logaritmi, non c'è molta speranza di trovare delle formule simboliche esatte per gli zeri. Possiamo però usare il teorema dell'esistenza degli zeri, i limiti agli estremi e la monotonia già studiati per ricavare informazioni inoppugnabili sugli eventuali zeri.
Cominciamo dall'intervallo $]-\infty, -1[$, su cui la funzione è continua e strettamente decrescente: all'estremo sinistro il limite di g è $+\infty$, all'estremo destro è $-\infty$, per cui esiste uno zero di g in tale intervallo ed è unico .
Su $]-1, 2[$ la funzione è continua, ma i limiti di g agli estremi sono entrambi $-\infty$, dello stesso segno. Nel punto di massimo locale intermedio $7/5$ la funzione ha un valore che non è facile valutare senza una calcolatrice. Però nel punto $x = 0$ il valore si calcola facilmente:

$$g(0) = 8\log\Big(\frac{1}{2}|2+0-0^2|\Big) + 5\cdot 0^2 - 4\cdot 0 = 8\log 1 = 0.$$

Il punto $x = 0$ è pertanto uno zero esplicito esatto della funzione. Poiché la g è strettamente crescente su $]-1, 0]$ e su $[0, 7/5]$, non ci sono altri zeri su tali intervalli, e inoltre $g(7/5) > g(0) = 0$.

Sull'intervallo $[7/5, 2[$ c'è un unico zero della g, perché la funzione è continua, strettamente decrescente, e assume valori di segno opposto agli estremi.
Sul rimanente intervallo $]-\infty, +\infty[$ la funzione g ha un unico zero in quanto è continua, strettamente crescente e ha valori di segno opposto ($\mp\infty$) agli estremi.
In totale abbiamo quattro zeri della g, dei quali uno è noto esattamente.



e. Calcoliamo la derivata seconda:

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= D\Big(2\frac{-5x^3+7x^2}{2+x-x^2}\Big) = 2\cdot\frac{(-15x^2+14x)(2+x-x^2)-(-5x^3+7x^2)(1-2x)}{(2+x-x^2)^2} = \\
&= 2x\cdot\frac{(-15x+14)(2+x-x^2)-(-5x^2+7x)(1-2x)}{(2+x-x^2)^2} = \\
&= 2\frac{-30x-15x^2+15x^3+28+14x-14x^2-(-5x^2+10x^3+7x-14x^2)}{(2+x-x^2)^2} = \\
&= 2x\cdot\frac{15x^3-29x^2-16x+28+5x^2-10x^3-7x+14x^2}{(2+x-x^2)^2} = \\
&= 2x\cdot\frac{5x^3-10x^2-23x+28}{(2+x-x^2)^2}.
\end{aligned}
$$

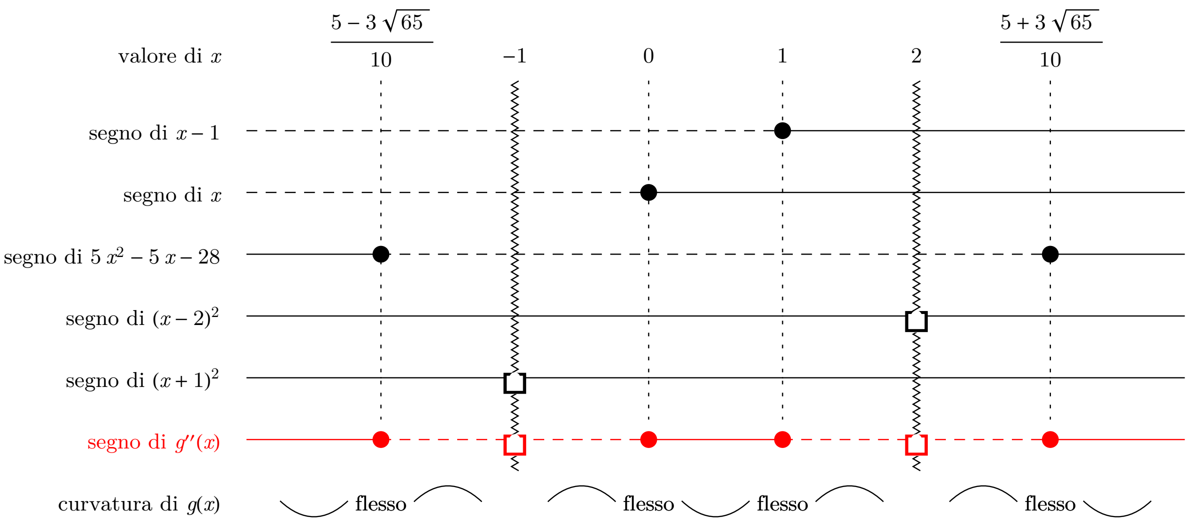
Il numeratore contiene un polinomio di terzo grado, di cui si trova sùbito la radice 1, e quindi si può scomporre con la regola di Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -10 & -23 & 28 \\
1 & & 5 & -5 & -28 \\
\hline
 & 5 & -5 & -28 & 0
\end{array}
$$

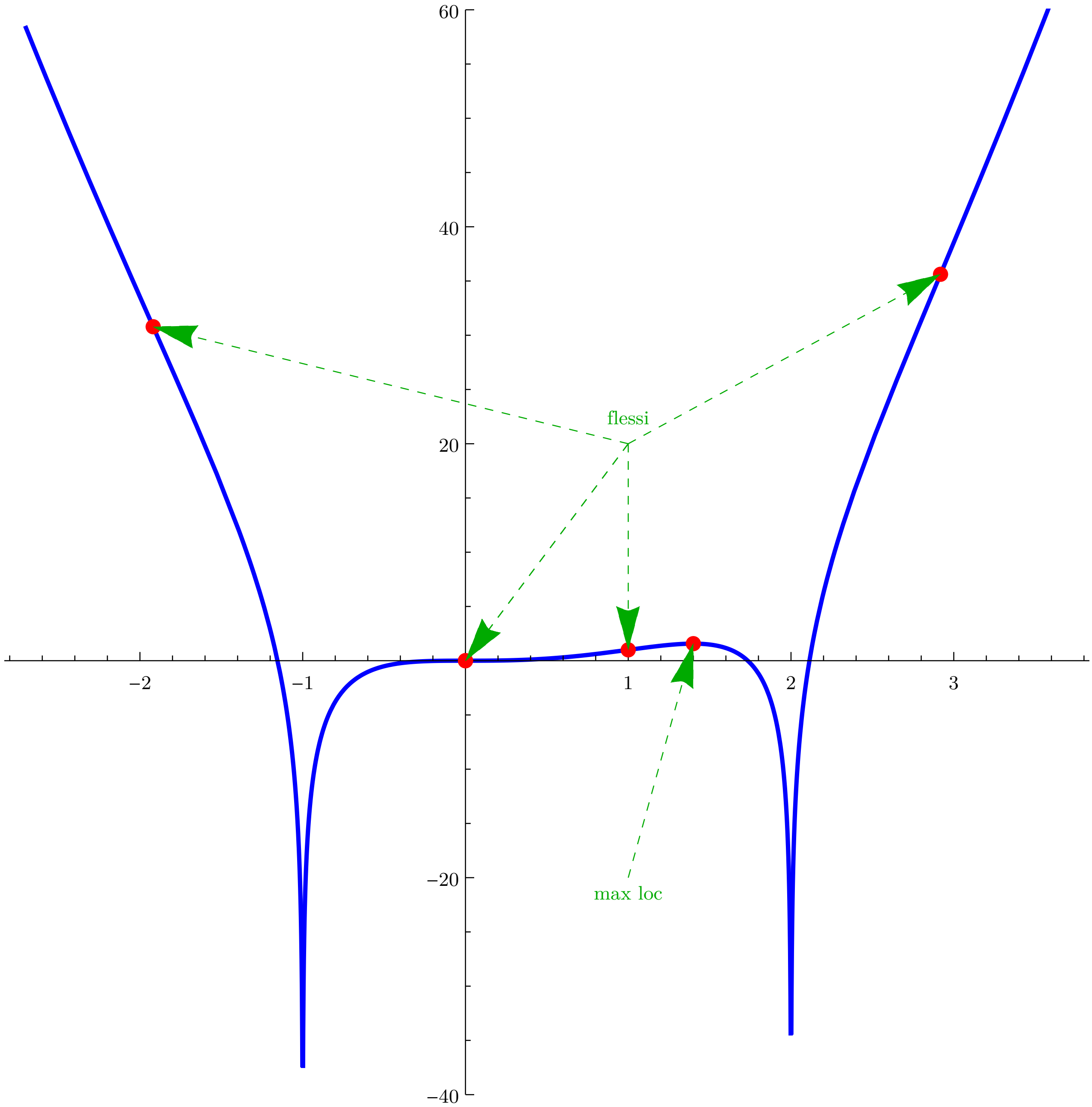
Quindi

$$
g''(x) = \frac{2x(x-1)(5x^2-5x-28)}{(2+x-x^2)^2}.
$$

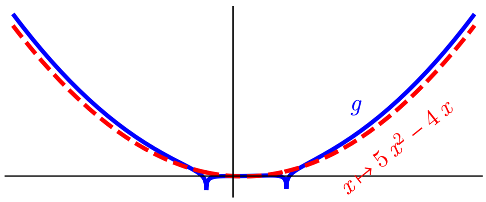
Il discriminante di $5x^2-5x-28$ è $\Delta = 5^2-4\cdot 5(-28) = 585 = 3^2\cdot 65$, e quindi le due radici sono $(5\pm 3\sqrt{65})/10$, che sono circa $-1{,}9$ e $2{,}9$. Lo studio del segno della derivata seconda è nello schema seguente:



f. Un grafico di g con i punti notevoli:



Nella figura il grafico attorno ai due flessi per $x = (5 \pm 3\sqrt{65})/10$ è così rettilineo che i punto sono poco riconoscibili come flessi. Per capire la situazione bisogna allargare la visuale: lontano dall'origine la g ha una curvatura che segue quella della parabola (in rosso) $y = 5x^2 - 4x$, e quindi in grande non è rettilinea.



4. Dobbiamo mettere successioni $(2n+1)!/n^n$, n^{-n}, $n \log n$, $(2 + \operatorname{sen} n)/n$, $n/(\log n)$, $n!$, $(1 + \frac{1}{n^2})^n$ in ordine crescente, nel senso che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $n \to +\infty$.
La prima cosa da fare è individuare i limiti delle varie successioni, per metterli in ordine crescente. Dovremo poi distinguere gli infinitesimi fra loro e gli infiniti fra loro. Per $n \to +\infty$ la funzione $n^{-n} = 1/n^n$ tende evidentemente a 0, mentre $n!$ tende a $+\infty$. Due altri infiniti noti sono $n/(\log n)$ e $n \log n$, il primo leggermente minore di n e il secondo leggermente maggiore. Un'altra funzione dal limite abbastanza facile è $(2 + \operatorname{sen} n)/n$, in quanto il numeratore $2 + \operatorname{sen} n$, sebbene sia oscillante, è sempre compresa fra 1 e 3, mentre il denominatore tende all'infinito, per cui la frazione tende a 0 per il teorema del confronto.

Rimangono due successioni con limite non ovvio. Una è $(2n+1)!/n^n$, che è il rapporto fra due infiniti molto veloci. Proviamo ad espandere numeratore e denominatore e ad associare i fattori:

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!}{n^n} &= \frac{\overbrace{(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}^{n+1\text{ fattori}}\overbrace{(n)(n-1)\cdots 2\cdot 1}^{n\text{ fattori}}}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n\text{ fattori}}} = \\ &= (2n+1)\cdot\frac{\overbrace{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}^{n\text{ fattori}}}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n\text{ fattori}}}\cdot\overbrace{(n)(n-1)\cdots 2\cdot 1}^{n\text{ fattori}} = \\ &= (2n+1)\cdot\overbrace{\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n-2}{n}\cdots\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n}}^{n\text{ fattori, tutti }>1}\cdot n! > \\ &> (2n+1)\cdot n! \to +\infty.\end{aligned}$$

Per il teorema del confronto, $(2n+1)!/n^n \to +\infty$. L'ultima successione è $(1+\frac{1}{n^2})^n$, il cui limite si può decidere per esempio passando ai logaritmi e usando il limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^n &= \lim_{n\to+\infty}\exp\log\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^n = \exp\lim_{n\to+\infty}\log\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^n = \\ &= \exp\lim_{n\to+\infty} n\log n\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big) = \exp\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)}{\frac{1}{n^2}} = \\ &= \exp\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)}{\frac{1}{n^2}} = \exp 0\cdot 1 = e^0 = 1.\end{aligned}$$

Pertanto $(1+\frac{1}{n^2})^n$ è l'unica delle successioni ad avere limite finito non nullo, e sarà quindi intermedia fra gli infinitesimi e gli infiniti.
Confrontiamo i due infinitesimi n^{-n} e $(2+\operatorname{sen} n)/n$ facendo il rapporto:

$$\frac{(2+\operatorname{sen} n)/n}{n^{-n}} = \frac{2+\operatorname{sen} n}{n^{-n}\cdot n} = n^{n-1}\cdot\underbrace{(2+\operatorname{sen} n)}_{\geq 2-1=1} \geq n^{n-1} \to +\infty.$$

Per il teorema del confronto il rapporto tende a $+\infty$, e quindi $n^{-n} = o((2+\operatorname{sen} n)/n)$. La cosa era prevedibile se pensiamo che n^{-n} è il reciproco di n^n, rinomato per essere un infinito molto veloce, mentre $(2+\operatorname{sen} n)/n$ va a zero non più velocemente di $3/n$, che è un infinitesimo non veloce.
Passiamo a confrontare gli infiniti. Abbiamo già osservato che $n/(\log n)$ è minore di $n\log n$, ma facciamo il conto del rapporto:

$$\frac{n/(\log n)}{n\log n} = \frac{1}{\log^2 n} \longrightarrow \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Pertanto $n/(\log n) = o(n\log n)$. Essendo $n\log n$ poco più grande di n, ci aspettiamo che sia molto più piccolo di $n!$, che cresce molto veloce. Facciamo il conto, cercando di riportarci a limiti noti:

$$\frac{n\log n}{n!} = \frac{\log n}{(n-1)!} = \frac{\log n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{(n-2)!} \longrightarrow 0\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

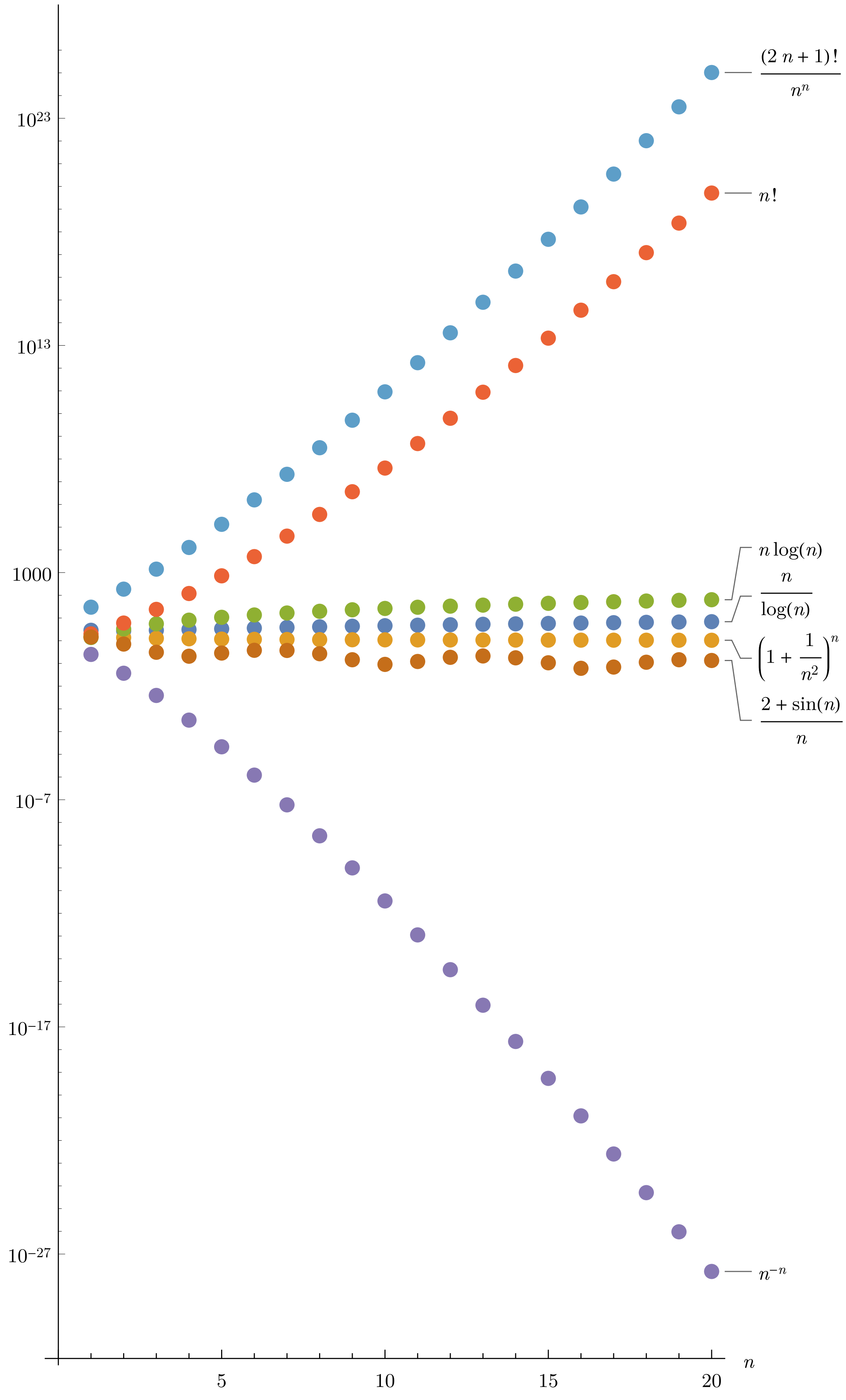
È confermato che $n\log n = o(n!)$. Confrontiamo infine $(2n+1)!/n^n$ con $n!$, riciclando le disuguaglianze che abbiamo già trovato prima:

$$\frac{(2n+1)!/n^n}{n!} > \frac{(2n+1)\cdot n!}{n!} = 2n+1 \longrightarrow +\infty.$$

Quindi $n! = o((2n+1)!/n^n)$. Ricapitolando, le successioni nell'ordine richiesto sono

$$n^{-n}, \qquad \frac{2+\operatorname{sen} n}{n}, \qquad \Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^n, \qquad \frac{n}{\log n}, \qquad n\log n, \qquad n!, \qquad \frac{(2n+1)!}{n^n}.$$

L'ordine risalta bene nel grafico in scala logaritmica:



5.a. La funzione razionale $(3x^3-2x^2+x)/(6x^2+5x+1)$ ha il numeratore di grado maggiore del denominatore. Facciamo la divisione di polinomi:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+3\,x^3 & -2\,x^2 & +x & & +6\,x^2 & +5\,x & +1 \\ \cline{5-7}
 & & & & & +\frac{x}{2} & -\frac{3}{4} \\
-3\,x^3 & -\frac{5\,x^2}{2} & -\frac{x}{2} & & & & \\ \cline{1-4}
 & -\frac{9\,x^2}{2} & +\frac{x}{2} & & & & \\
 & +\frac{9\,x^2}{2} & +\frac{15\,x}{4} & +\frac{3}{4} & & & \\ \cline{1-4}
 & & +\frac{17\,x}{4} & +\frac{3}{4} & & &
\end{array}
$$

Quindi abbiamo la decomposizione

$$\frac{3x^3-2x^2+x}{6x^2+5x+1}=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{\frac{17}{4}x+\frac{3}{4}}{6x^2+5x+1}=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{17x+3}{6x^2+5x+1}.$$

Il denominatore ha discriminante $\Delta/4=5^2-4\cdot6\cdot1=1$, e quindi ha le due radici reali $(-5\pm1)/12$, cioè $-1/2$ e $-1/3$. La funzione razionale che è rimasta si scompone in fattori così

$$\frac{17x+3}{6x^2+5x+1}=\frac{17x+3}{6(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})}=\frac{17x+3}{2(x+\frac{1}{2})\cdot3(x+\frac{1}{3})}=\frac{17x+3}{(2x+1)(3x+1)},$$

si può decomporre in somma di fratti più semplici imponendo

$$\frac{17x+3}{(2x+1)(3x+1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{3x+1}=\frac{A(3x+1)+B(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)}=\frac{(3A+2B)x+(A+B)}{(2x+1)(3x+1)},$$

da cui, uguagliando i coefficienti dei numeratori al primo e all'ultimo membro,

$$\begin{cases}3A+2B=17\\A+B=3\end{cases}\iff\begin{cases}A=11\\B=-8.\end{cases}$$

La decomposizione è complessivamente

$$\begin{aligned}\frac{3x^3-2x^2+x}{6x^2+5x+1}&=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\Bigl(\frac{11}{2x+1}+\frac{-8}{3x+1}\Bigr)=\\&=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2x+1}-\frac{2}{3x+1}=\\&=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{11}{8}\cdot\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3x+1},\end{aligned}$$

che si integra con le regole di base:

$$\int\frac{3x^3-2x^2+x}{9x^2+6x+1}dx=\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}x+\frac{11}{8}\log|2x+1|-\frac{2}{3}\log|3x+1|.$$

b. La funzione

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2x}}$$

può essere riportata alla forma $f'(x)/\sqrt{1-f(x)^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2x}}&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2x}}=\\&=D(\operatorname{arcsen}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2x}}=\\&=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}=D\bigl(\operatorname{arcsen}f(x)\bigr).\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\operatorname{arcsen}^2 x}} \right) dx = \operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} x)\,.$$

c. La funzione

$$\frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{2x}$$

si può scrivere nella forma $f'(x)\operatorname{sen} f(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{2x} &= = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}(2\log x) = \frac{1}{2}D(\log x)\cdot\operatorname{sen}(2\log x) = \\ &= \frac{1}{4}D(2\log x)\cdot\operatorname{sen}(2\log x) = \frac{1}{4}f'(x)\cdot\operatorname{sen} f(x).\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{2x}dx = -\frac{1}{4}\cos f(x) = -\frac{1}{4}\cos(2\log x).$$

d. Per calcolare una primitiva di $(x-1)\log^2(x+1)$ proviamo per parti due volte, mirando ad abbassare di grado e poi eliminare il logaritmo:

$$\begin{aligned}
\int (x-1)\log^2(x+1)dx &= \int D\Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int\Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)D\big(\log^2(x+1)\big)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int\Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)2\big(\log(x+1)\big)D\big(\log(x+1)\big)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int(x^2-2x)\frac{\log(x+1)}{x+1}dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int\frac{x^2-2x}{x+1}\log(x+1)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int\frac{x^2+x-3x-3+3}{x+1}\log(x+1)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int\Big(x-3+\frac{3}{x+1}\Big)\log(x+1)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \int D\Big(\frac{x^2}{2}-3x+3\log(x+1)\Big)\log(x+1)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \Big(\frac{x^2}{2}-3x+3\log(x+1)\Big)\log(x+1) + \\
&\qquad + \int\Big(\frac{x^2}{2}-3x+3\log(x+1)\Big)\frac{1}{x+1}dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x\Big)\log^2(x+1) - \Big(\frac{x^2}{2}-3x\Big)\log(x+1) - 3\log^2(x+1) + \\
&\qquad + \int\Big(\frac{x^2-6x}{2(x+1)} + 3\frac{\log(x+1)}{x+1}\Big)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x-3\Big)\log^2(x+1) - \Big(\frac{x^2}{2}-3x\Big)\log(x+1) + \\
&\qquad + \int\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+x-7x-7+7}{x+1} + 3\big(\log(x+1)\big)D\big(\log(x+1)\big)\Big)dx = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x-3\Big)\log^2(x+1) - \Big(\frac{x^2}{2}-3x\Big)\log(x+1) + \\
&\qquad + \int\frac{1}{2}\Big(x-7+\frac{7}{x+1}\Big)dx + \frac{3}{2}\log^2(x+1) = \\
&= \Big(\frac{x^2}{2}-x-3+\frac{3}{2}\Big)\log^2(x+1) - \Big(\frac{x^2}{2}-3x\Big)\log(x+1) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2}-7x\Big)+\frac{7}{2}\log(x+1)= \\
&=\Big(\frac{x^2}{2}-x-\frac{3}{2}\Big)\log^2(x+1)-\Big(\frac{x^2}{2}-3x-\frac{7}{2}\Big)\log(x+1)+ \\
&+\frac{x^2}{4}-\frac{7}{2}x= \\
&=\frac{x^2-2x-3}{2}\log^2(x+1)-\frac{x^2-6x-7}{2}\log(x+1)+\frac{x^2}{4}-\frac{7}{2}x.
\end{aligned}
$$

5. Nell'integrale

$$\int \frac{1}{\Big(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)^2}\,dx$$

facciamo la sostituzione suggerita $y=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$. Esprimiamo x in funzione di $y\geq 0$:

$$y=\sqrt{1+\frac{1}{x}} \iff y^2=1+\frac{1}{x} \iff \frac{1}{x}=y^2-1 \iff x=\frac{1}{y^2-1}.$$

Il differenziale dx diventa

$$dx=D_y\Big(\frac{1}{y^2-1}\Big)dy=-(y^2-1)^{-2}2ydy=-\frac{2y}{(y^2-1)^2}dy.$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\Big(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x^2\Big(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)^2}dx= \\
&=\int \frac{1}{\big(\frac{1}{y^2-1}\big)^2(1+y)^2}\Big(-\frac{2y}{(y^2-1)^2}\Big)dy= \\
&=-\int \frac{(y^2-1)^2}{(1+y)^2}\cdot\frac{2y}{(y^2-1)^2}\,dy= \\
&=-\int \frac{2y}{(1+y)^2}\,dy=-\int\frac{2+2y-2}{(1+y)^2}\,dy=-\int\Big(\frac{2}{1+y}-\frac{2}{(1+y)^2}\Big)\,dy \\
&=-2\log|1+y|-2(1+y)^{-1}=-2\log|1+y|-\frac{2}{1+y}.
\end{aligned}
$$

Torniamo alla variabile originaria x:

$$\int \frac{1}{\Big(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)^2}\,dx = -2\log\Big|1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big|-\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$