Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 5 febbraio 2015

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)}{\ln x-\sqrt{1+2\ln^2 x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2x^3)(2x^2-x^4-3x^3)}{(x+2)(1+2x^3-x^2)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{\log(e^x+2^x)}-\sqrt{x+2\sqrt{x}}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log(2x)-x^{1/(x-1)}}{(x^2-1)(3x^2-2x-1)\log x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^5-(1+2x^2)(3x^2+x^4)}{(x+1)x^5+(x^3+1)(2x^2-x^3)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\big(2\sqrt{x^4-x^3}+x\sqrt{1+4x^2}\big)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1}\big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}\right)^{x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\log(x^2)}{x^3-3x+2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\big(1+x\big)^{1/x}-3}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{2\cos x-\sqrt{x+4}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}\Big)^{x^2}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x+x\,\mathrm{sen}\,4x}{x^3-\sqrt{x^6-2x^5}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x\big(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\big)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a)}\quad \frac{32}{3(x+4)}-\frac{5}{3(x+1)}\ge x+1,\qquad \text{(b)}\quad 3\min\big\{x+1,\max\{-x-2,2x\}\big\}\ge x,$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{\frac{4-4x^2}{4x+5}}\le 2.$$

3. Dimostrare *per induzione* che $2n+(2n+1)+(2n+2)+\cdots+3(n+1)=(n+4)(5n+3)/2$ se $n\ge1$.

4. Poniamo $X=\big\{(1+4(-1)^n n)/(2+3n)\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che $7/4$ è l'estremo superiore e -5 è l'estremo inferiore di X, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 5 febbraio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6+x^5-(2x^2-1)(x^4-3x^2)}{(x^3-1)(x^3+2x^2)-x^5(x-1)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x^2-x^3)(3x^2-2x^4-x^3)}{(2x-1)(3+2x^3-x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\operatorname{sen} 2x-(x+2)^{1/(x+1)}}{(x^2+3x+2)(1-x^2)\operatorname{sen}(1+x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\log(e^x-2^x)}-\sqrt{x-3\sqrt{x}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{3x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^4-x^3}+2x\sqrt{1+x^2}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(xe^{x+1}-\sqrt{x^2e^{2x+2}+xe^x+1}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{(x+1)\log(x^2)}{2+3x-x^3}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{3\ln x-\sqrt{\ln^2 x-1}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(e^{1/x}-\cos(\frac{1}{x})\right)}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{\cos x-\sqrt{2x+1}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x-2\cos x}{x^3-\sqrt{x^6+3x^5}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1-x)^{1/x}-3}{x-\sqrt{x^2-4x^3}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+2x-1}{x^3-x}\right)^{x^2}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{32}{3(4-x)}-\frac{5}{3(1-x)}\geq 1-x$, (b) $3\min\bigl\{1-x,\max\{x-2,-2x\}\bigr\}+x\geq 0$,

(c) $\displaystyle\sqrt{\frac{4-4x^2}{5-4x}}\leq 2.$

3. Dimostrare *per induzione* che $(2n-2)+(2n-1)+2n+\cdots+(3n+1)=(n+4)(5n-1)/2$ se $n\geq 1$.

4. Poniamo $A=\bigl\{(1-4(-1)^n n)/(2+3n)\ :\ n\in\mathbb{Z}\bigr\}$. Dimostrare che 3 è l'estremo superiore e $-9/4$ è l'estremo inferiore di A, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 5 febbraio 2015

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\cos 2x - (x+2)^{1/(x+1)}}{(x^2-x-2)(x^2-1)\operatorname{sen}(x+1)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\bigl(\sqrt{1+x^2}-x\bigr)}{2\ln x - \sqrt{1+\ln^2 x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \bigl(\sqrt{4x^4-x^3}+2x\sqrt{x^2-1}\bigr)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^6+x^5-(2x^2+1)(x^4+2x^2)}{x^5(x+1)+(1+x^3)(3x^2-x^3)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Bigl(\sqrt{\log(e^x+2^x)}-\sqrt{x-2\sqrt{x}}\Bigr)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{(5x-x^3)(3x-x^4+2x^3)}{(3x+1)(3+2x^3-x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \bigl(xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}-xe^x-1}\bigr)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Bigl(\frac{x^3-2x+1}{x^3+x}\Bigr)^{x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x\bigl(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\bigr)}{x+\sqrt{3x+x^2}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{(1+x)\log(x^2)}{x^3-3x-2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\bigl(1+x\bigr)^{1/x}-3}{2x-\sqrt{4x^2-x^3}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{\sqrt{1+3x}-\cos x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \bigl(2x-2\sqrt{x^2-x}\bigr)^{3x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x\operatorname{sen} x-\cos 3x}{x^3-\sqrt{x^6+2x^5}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{25}{3(x+5)}-\frac{16}{3(x+2)} \ge x-1$, (b) $3\min\bigl\{x,\max\{-x-1,2(x-1)\}\bigr\} \ge x-1$,

(c) $\displaystyle\sqrt{\frac{2x-x^2}{4x+1}} \le 1.$

3. Dimostrare *per induzione* che $(2n-1)+2n+(2n+1)+\cdots+(3n+2)=(n+4)(5n+1)/2$ se $n\ge 1$.

4. Poniamo $E=\bigl\{(1-4(-1)^n n)/(3+2n)\ : \ n\in\mathbb{Z}\bigr\}$. Dimostrare che $11/3$ è l'estremo superiore e -9 è l'estremo inferiore di E, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2014/2015

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 5 febbraio 2015

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\bigl(x-\sqrt{x^2-1}\bigr)}{\ln x-\sqrt{1+3\ln^2 x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Bigl(\sqrt{\log(e^x-2^x)}-\sqrt{x+3\sqrt{x}}\Bigr)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\log(2x)-x^{1/(x-1)}}{(x^2-1)(1-4x+3x^2)\log x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6+x^5-(2x^2+1)(3x^2+x^4)}{(x^3-1)(x^3+2x^2)-x^5(x+1)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \bigl(2\sqrt{x^4-x^3}+x\sqrt{4x^2-1}\bigr)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \bigl(xe^{x+1}-\sqrt{x^2e^{2x+2}-xe^x+1}\bigr)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-5x^3)(2x-x^4+4x^3)}{(4x+1)(3+x^3-x^2)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{\cos x-\sqrt{1-3x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x-\sqrt{1+x^2}}\right)^{x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x\bigl(e^{1/x}-\cos(\frac{1}{x})\bigr)}{x+\sqrt{x^2-2x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\bigl(1-x\bigr)^{1/x}-3}{2x-\sqrt{4x^2-x^3}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+x+1}{x^3+3x}\right)^{x^2}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{(x-1)\log(x^2)}{x^3-3x+2}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x-2x\operatorname{sen} x}{x^3-\sqrt{x^6-3x^5}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{16}{3(2-x)}-\frac{25}{3(5-x)}\le x+1,$ (b) $3\min\bigl\{-x,\max\{2(-x-1),x-1\}\bigr\}+x+1\ge0,$

(c) $\displaystyle\sqrt{\frac{x^2+2x}{4x-1}}\le 1.$

3. Dimostrare *per induzione* che $(2n+1)+(2n+2)+(2n+3)+\cdots+(3n-2)=(n-2)(5n-1)/2$ se $n\ge3$.

4. Poniamo $Y=\bigl\{(5+2(-1)^n n)/(3-2n)\ :\ n\in\mathbb{Z}\bigr\}$. Dimostrare che 3 è l'estremo superiore e -9 è l'estremo inferiore di Y, stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 5 febbraio 2015

Svolgimento

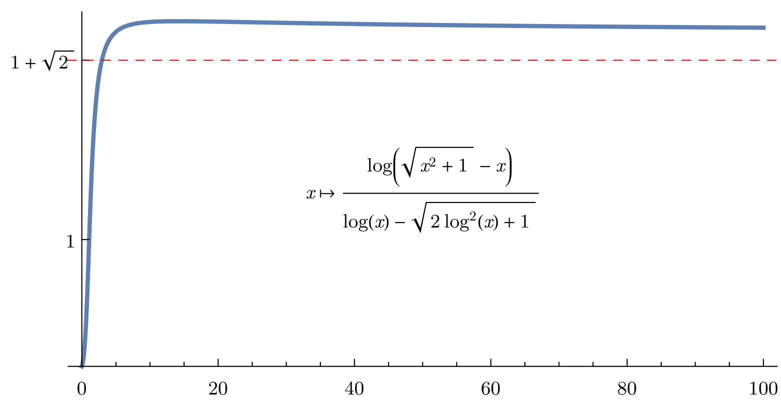
Le figure che seguono ogni calcolo di limite, nonché quelle che accompagnano i **complementi** servono ad allargare l'orizzonte per il lettore, e non sono minimamente richieste nello svolgimento del compito d'esame. Gli schemi usati nella soluzione delle disequazioni sono invece parte integrante dello svolgimento; sono consigliati ma non obbligatori.

1. a. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\ln x - \sqrt{1+2\ln^2 x}}$$

il numeratore è il logaritmo di una forma indeterminata $+\infty-\infty$, mentre il denominatore è esso stesso indeterminato del tipo $+\infty-\infty$. Dentro al logaritmo al numeratore moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{1+x^2}+x$, mentre al denominatore è più veloce raccogliere il termine principale dentro la radice:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\ln x - \sqrt{1+2\ln^2 x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)}{\ln x - (\ln x)\sqrt{\frac{1}{\ln^2 x}+2}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 1 - \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\sqrt{\dfrac{1}{\ln^2 x}+2}}}_{\to 1-\sqrt{2}\neq 0} = \\
&= -\frac{1}{1-\sqrt{2}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x\sqrt{1+x^{-2}}+x\right)}{\ln x} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\Big(x\left(\sqrt{1+x^{-2}}+1\right)\Big)}{\ln x} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(\sqrt{1+x^{-2}}+1\right)}{\ln x} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln\overbrace{\left(\sqrt{1+x^{-2}}+1\right)}^{\to 2}}{\underbrace{\ln x}_{\to+\infty}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1^2} = 1+\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

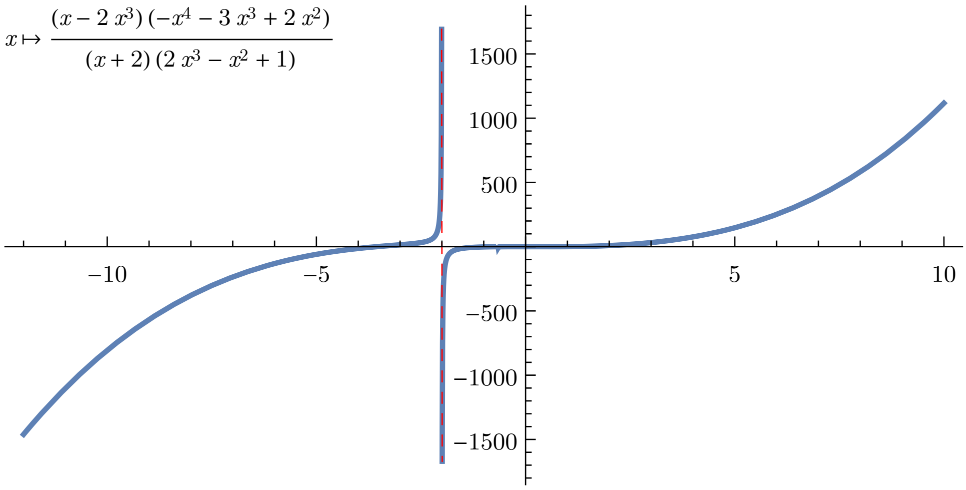


b. Il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2x^3)(2x^2-x^4-3x^3)}{(x+2)(1+2x^3-x^2)}$$

si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Numeratore e denominatore sono (prodotti di) polinomi. Raccogliamo i termini di grado massimo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2x^3)(2x^2-x^4-3x^3)}{(x+2)(1+2x^3-x^2)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(x^{-2}-2)\cdot x^4(2x^{-2}-1-3x^{-1})}{x(1+2x^{-1})\cdot x^3(x^{-3}+2-x^{-1})} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^{3+4-1-3}\cdot\frac{\overbrace{(x^{-2}-2)(2x^{-2}-1-3x^{-1})}^{\to(-2)(-1)}}{\underbrace{(1+2x^{-1})(x^{-3}+2-x^{-1})}_{\to 1\cdot 2}} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\frac{2}{2} = -\infty.\end{aligned}$$



c. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log(e^x+2^x)}-\sqrt{x+2\sqrt{x}}\right)$$

è della forma indeterminata $+\infty-\infty$. Mettiamo in evidenza i termine principali:

$$\begin{aligned}\sqrt{\log(e^x+2^x)}-\sqrt{x+2\sqrt{x}} &= \sqrt{\log\big(e^x(1+(2/e)^x)\big)}-\sqrt{x(1+2\sqrt{1/x})} = \\ &= \sqrt{loge^x+\log(1+(2/e)^x)}-\sqrt{x}\sqrt{1+2\sqrt{1/x}} = \\ &= \sqrt{x+\log(1+(2/e)^x)}-\sqrt{x}\sqrt{1+2\sqrt{1/x}} = \\ &= \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\log(1+(2/e)^x)}{\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\sqrt{1+2\sqrt{1/x}} = \\ &= \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{\log(1+(2/e)^x)}{\sqrt{x}}}-\sqrt{1+2\sqrt{1/x}}\right)}_{\to 1-1=0}.\end{aligned}$$

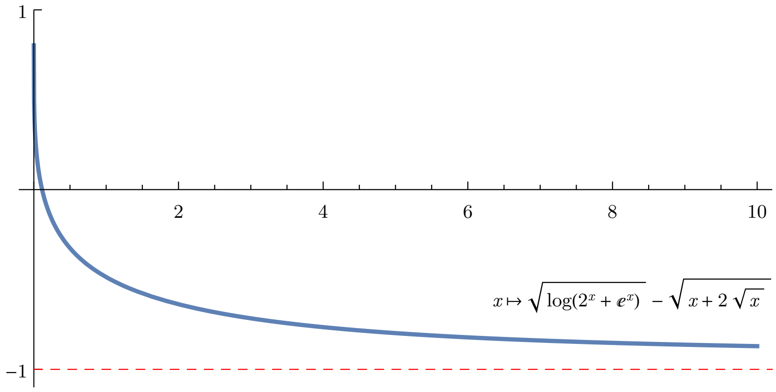
Si ottiene una forma indeterminata $\infty\cdot 0$ perché i termini principali si elidono. Quindi torniamo indietro e moltiplichiamo e dividiamo per la differenza delle radici:

$$\begin{aligned}\sqrt{\log(e^x+2^x)}-\sqrt{x+2\sqrt{x}} &= \frac{\log(e^x+2^x)-\big(x+2\sqrt{x}\big)}{\sqrt{\log(e^x+2^x)}+\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \\ &= \frac{x+\log(1+(2/e)^x)-x-2\sqrt{x}}{\sqrt{\log(e^x+2^x)}+\sqrt{x+2\sqrt{x}}} =\end{aligned}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x} + \log(1+(2/e)^x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\log(1+(2/e)^x)}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1+2\sqrt{1/x}}} =$$

$$= \underbrace{\left(-2 + \frac{\log(1+(2/e)^x)}{\sqrt{x}}\right)}_{\to -2+0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{\log(1+(2/e)^x)}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1+2\sqrt{1/x}}}_{\to 1+1=2}} \to$$

$$\longrightarrow (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$$



d. Nel limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2-1)(3x^2-2x-1)\log x}$$

il numeratore è nella forma indeterminata $\log 2 - 1^{\pm\infty}$ mentre il denominatore tende a 0. Può convenire fare un cambio di variabile del tipo $y = x - 1$ (ossia $x = 1 + y$) per riportarci a un limite per $y \to 0$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2-1)(3x^2-2x-1)\log x} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(2(y+1)) - (1+y)^{1/y}}{\big((y+1)^2-1\big)\big(3(y+1)^2 - 2(y+1) - 1\big)\log(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(2+2y) - (1+y)^{1/y}}{(y^2+2y)(3y^2+4y)\log(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(2+2y) - (1+y)^{1/y}}{y(y+2)\cdot y(3y+4)\log(1+y)} =$$

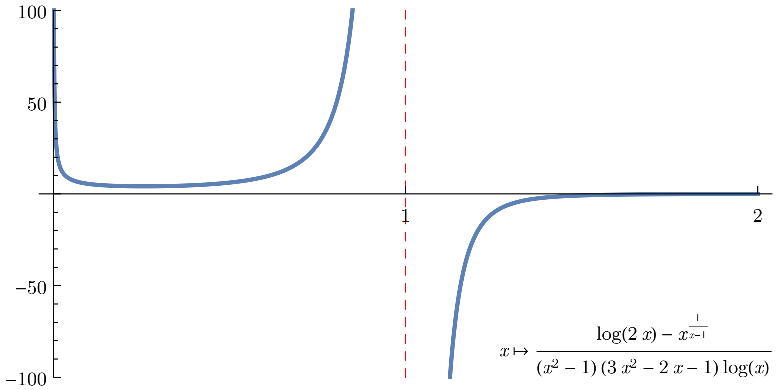
$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2\cdot y} \cdot \frac{\overbrace{\log(2+2y) - (1+y)^{1/y}}^{\to \log 2 - e}}{\underbrace{(y+2)(3y+4)\cdot \frac{\log(1+y)}{y}}_{\to 2\cdot 4\cdot 1}} = \frac{2-e}{8} \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^3}.$$

L'ultimo limite è infinito con segno opposto a seconda che $y \to 0^{\pm}$, cioè che $x \to 1^{\pm}$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2-1)(3x^2-2x-1)\log x} = \frac{\overbrace{2-e}^{<0}}{8} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^3} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2-1)(3x^2-2x-1)\log x} = \frac{\overbrace{2-e}^{<0}}{8} \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y^3} = +\infty.$$

Concludiamo che il limite cercato non esiste.



e. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6 - x^5 - (1+2x^2)(3x^2+x^4)}{(x+1)x^5 + (x^3+1)(2x^2-x^3)}$$

numeratore e denominatore sono polinomi ma non in forma normale. Vediamo cosa succede mettendo in evidenza i termini principali senza applicare la proprietà distributiva:

$$\frac{2x^6 - x^5 - (1+2x^2)(3x^2+x^4)}{(x+1)x^5 + (x^3+1)(2x^2-x^3)} = \frac{x^6(2-x^{-1}) - x^2(x^{-2}+1)\cdot x^4(3x^{-2}+2)}{x^6(1+x^{-1}) + x^3(1+x^{-3})x^3(2x^{-1}-1)} =$$

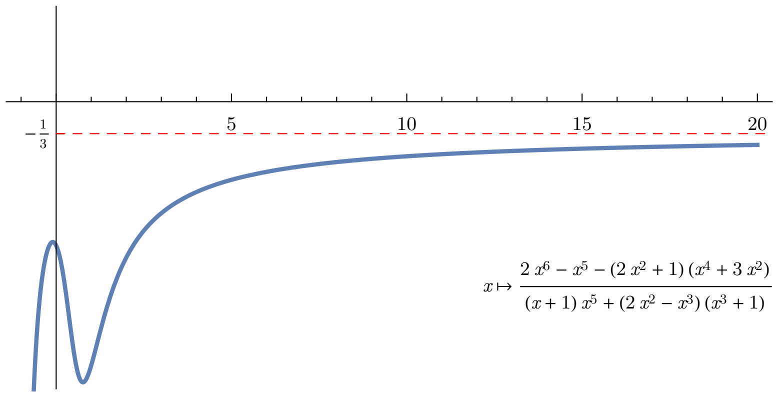
$$= \frac{\overbrace{(2-x^{-1}) - (x^{-2}+1)(3x^{-2}+2)}^{\to 2-2=0}}{\underbrace{(1+x^{-1}) + (1+x^{-3})(2x^{-1}-1)}_{\to 1-1=0}}.$$

Niente da fare, viene una forma indeterminata $0/0$. Cambiamo strada e applichiamo la proprietà distributiva per ridurre numeratore e denominatore in forma normale:

$$\frac{2x^6 - x^5 - (1+2x^2)(3x^2+x^4)}{(x+1)x^5 + (x^3+1)(2x^2-x^3)} = \frac{2x^6 - x^5 - (3x^2+x^4+6x^4+2x^6)}{x^6+x^5+2x^5-x^6+2x^2-x^3} =$$

$$= \frac{2x^6 - x^5 - 3x^2 - 7x^4 - 2x^6}{3x^5 - x^3 + 2x^2} = \frac{-x^5 - 7x^4 - 3x^2}{3x^5 - x^3 + 2x^2} =$$

$$= \frac{-1 - 7x^{-1} - 3x^{-3}}{3 - x^{-2} + 2x^{-3}} \longrightarrow \frac{-1+0}{3+0} = -\frac{1}{3}.$$



f. Il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2\sqrt{x^4-x^3} + x\sqrt{1+4x^2}\right)$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Proviamo a mettere in evidenza i termini principali sotto le radici, facendo attenzione che $x \to -\infty$, per cui $\sqrt{x^2} = |x| = -x$:

$$2\sqrt{x^4-x^3} + x\sqrt{1+4x^2} = 2\sqrt{x^4(1-x^{-1})} + x\sqrt{x^2(x^{-2}+4)} =$$

$$= 2\sqrt{x^4}\sqrt{1-x^{-1}} + x\sqrt{x^2}\sqrt{x^{-2}+4} = 2x^2\sqrt{1-x^{-1}} + x\cdot|x|\sqrt{x^{-2}+4} =$$

$$= 2x^2\sqrt{1-x^{-1}} - x^2\sqrt{x^{-2}+4} = \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(2\sqrt{1-x^{-1}} - \sqrt{x^{-2}+4}\right)}_{\to 2-2=0}.$$

Viene una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Cambiamo strada, moltiplicando numeratore e denominatore per la differenza, in modo che si elidano i termini principali al numeratore mentre si sommino al denominatore:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x^4-x^3}+x\sqrt{1+4x^2} &= \frac{\left(2\sqrt{x^4-x^3}+x\sqrt{1+4x^2}\right)\left(2\sqrt{x^4-x^3}-x\sqrt{1+4x^2}\right)}{2\sqrt{x^4-x^3}-x\sqrt{1+4x^2}} = \\
&= \frac{\left(2\sqrt{x^4-x^3}\right)^2-\left(x\sqrt{1+4x^2}\right)^2}{2x^2\sqrt{1-x^{-1}}-x\cdot|x|\sqrt{x^{-2}+4}} = \frac{4(x^4-x^3)-x^2(1+4x^2)}{x^2\left(2\sqrt{1-x^{-1}}+\sqrt{x^{-2}+4}\right)} = \\
&= \frac{4x^4-4x^3-x^2-4x^4}{x^2\left(2\sqrt{1-x^{-1}}+\sqrt{x^{-2}+4}\right)} = \frac{-4x^3-x^2}{x^2\left(2\sqrt{1-x^{-1}}+\sqrt{x^{-2}+4}\right)} = \\
&= \frac{x^3(-4-x^{-1})}{x^2\left(2\sqrt{1-x^{-1}}+\sqrt{x^{-2}+4}\right)} = x\cdot\frac{-4-x^{-1}}{2\sqrt{1-x^{-1}}+\sqrt{x^{-2}+4}}.
\end{aligned}$$

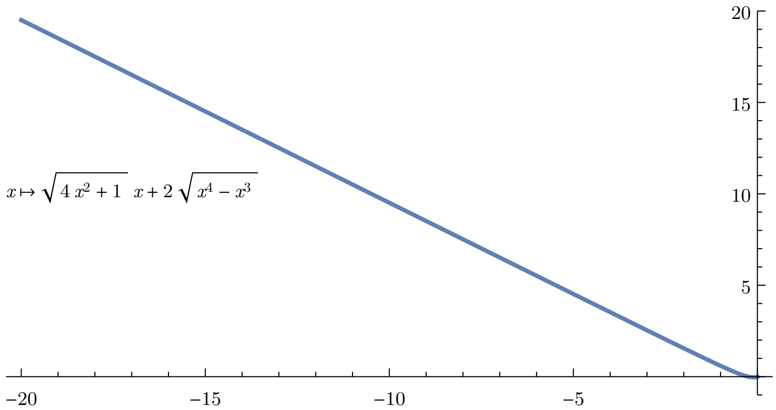
L'ultima espressione non è più indeterminata:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^4-x^3}+x\sqrt{1+4x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{-4-x^{-1}}{2\sqrt{1-x^{-1}}+\sqrt{x^{-2}+4}} = (-\infty)\cdot\frac{-4}{2+2} = +\infty.$$

Qualcuna sarebbe stata tentata di "trascurare" i termini x^3 e 1 dentro le radici e procedere così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^4-x^3}+x\sqrt{1+4x^2}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^4}+x\sqrt{4x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+x\cdot 2|x|\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}(2x^2-2x^2) = 0,
\end{aligned}$$

con risultato platealmente sbagliato.



g. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1}\right)$$

Si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Mettendo in evidenza i termini principali sotto la radice

$$\begin{aligned}
xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1} &= xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}(1+x^{-1}e^{-x+2}-x^{-2}e^{-2x+2})} = \\
&= \underbrace{xe^{x-1}}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{1-\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2}-x^{-2}e^{-2x+2}}}_{\to 1-1=0}\Big)
\end{aligned}$$

viene una forma indeterminata $\infty\cdot 0$. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma, in modo che al numeratore i termini principali si elidano, mentre al denominatore si sommino:

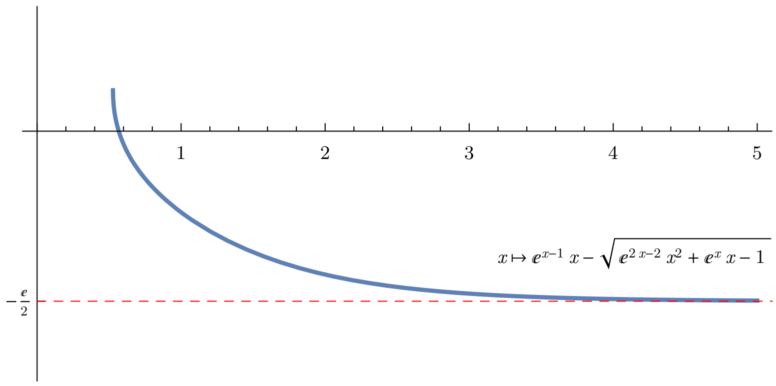
$$\begin{aligned}
xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1} &= \frac{\left(xe^{x-1}-\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1}\right)\left(xe^{x-1}+\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1}\right)}{xe^{x-1}+\sqrt{x^2e^{2x-2}+xe^x-1}} = \\
&= \frac{(xe^{x-1})^2-(x^2e^{2x-2}+xe^x-1)}{xe^{x-1}\left(1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2}-x^{-2}e^{-2x+2}}\right)} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^2e^{2x-2} - x^2e^{2x-2} - xe^x + 1}{xe^{x-1}\big(1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2} - x^{-2}e^{-2x+2}}\big)} = \\
&= \frac{-xe^x + 1}{xe^{x-1}\big(1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2} - x^{-2}e^{-2x+2}}\big)} = \\
&= \frac{xe^x(-1 + x^{-1}e^{-x})}{xe^{x-1}\big(1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2} - x^{-2}e^{-2x+2}}\big)} = \\
&= \frac{xe^x}{xe^{x-1}} \cdot \frac{-1 + x^{-1}e^{-x}}{1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2} - x^{-2}e^{-2x+2}}} = \\
&= e^{x-x+1} \cdot \frac{-1 + x^{-1}e^{-x}}{1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2} - x^{-2}e^{-2x+2}}} = \\
&= e \cdot \frac{-1 + x^{-1}e^{-x}}{1+\sqrt{1+x^{-1}e^{-x+2} - x^{-2}e^{-2x+2}}} \longrightarrow e \cdot \frac{-1+0}{1+1} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}
$$

Qualcuno forse sarebbe stato tentato di "trascurare" i termini trascurabili $xe^x - 1$ dentro la radice:

$$
\lim_{x\to+\infty}\big(xe^{x-1} - \sqrt{x^2e^{2x-2} + xe^x - 1}\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(xe^{x-1} - \sqrt{x^2e^{2x-2}}\big) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{x-1} - xe^{x-1}) = 0,
$$

con risultato errato.



h. Nel limite

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}}\right)^{x^2}
$$

al denominatore abbiamo una forma indeterminata $+\infty - \infty$, che si risolve raccogliendo il termine principale dentro la radice:

$$
\begin{aligned}
2x - \sqrt{2+x^2} = 2x - \sqrt{x^2(2x^{-2}+1)} &= 2x - |x|\sqrt{2x^{-2}+1} = \\
&= x\big(2 - \sqrt{2x^{-2}+1}\big) \longrightarrow +\infty \cdot (2-1) = +\infty.
\end{aligned}
$$

Quindi nel limite originale dentro la parentesi abbiamo una forma indeterminata ∞/∞, che possiamo risolvere così:

$$
\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{x\big(2 - \sqrt{2x^{-2}+1}\big)} = \frac{1}{2 - \sqrt{2x^{-2}+1}} \longrightarrow \frac{1}{2-1} = 1.
$$

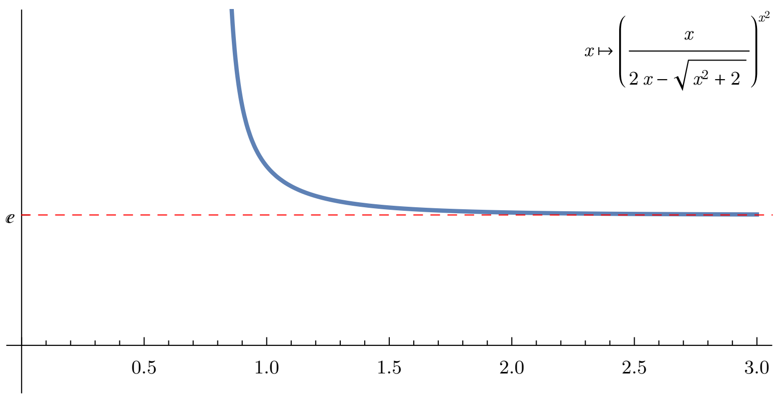
Il limite originale è dunque della forma indeterminata 1^∞. La procedura standard in questi casi è di prendere i logaritmi e riportarsi al limite notevole $(\log(1+y))/y \to 1$ per $y \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\log \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \log\Bigg(1 + \underbrace{\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} - 1}_{\to 1-1=0}\Bigg) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}-1\right) \underbrace{\left(\frac{\log\left(1+\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}-1\right)}{\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}-1}\right)}_{\to 1} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{x-(2x-\sqrt{2+x^2})}{2x-\sqrt{2+x^2}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{-x+\sqrt{2+x^2}}{x\left(2-\sqrt{2x^{-2}+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(-x+\sqrt{2+x^2}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{2-\sqrt{2x^{-2}+1}}}_{\to 2-1=1} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(-x+\sqrt{2+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\left(-x+\sqrt{2+x^2}\right)\left(-x-\sqrt{2+x^2}\right)}{-x-\sqrt{2+x^2}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{(-x)^2-(2+x^2)}{-x-\sqrt{x^2(2x^{-2}+1)}} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{x^2-2-x^2}{x\left(-1-\sqrt{2x^{-2}+1}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{-1-\sqrt{2x^{-2}+1}} = \frac{-2}{-1-1} = 1.
\end{aligned}
$$

Torniamo infine al limite originale:

$$
\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}\right)^{x^2} = \exp\left(\log \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x-\sqrt{2+x^2}}\right)^{x^2}\right) = \exp 1 = e^1 = e.
$$



i. Il limite

$$
\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\log(x^2)}{x^3-3x+2}
$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore si può scomporre in fattori usando la regola di Ruffini sapendo che una delle radici è 1: $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$. Il fattore restante di secondo grado ha radici $(-1\pm\sqrt{1+8})/2=(-1\pm 3)/2$, e quindi si scompone a sua volta come $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Possiamo quindi semplificare

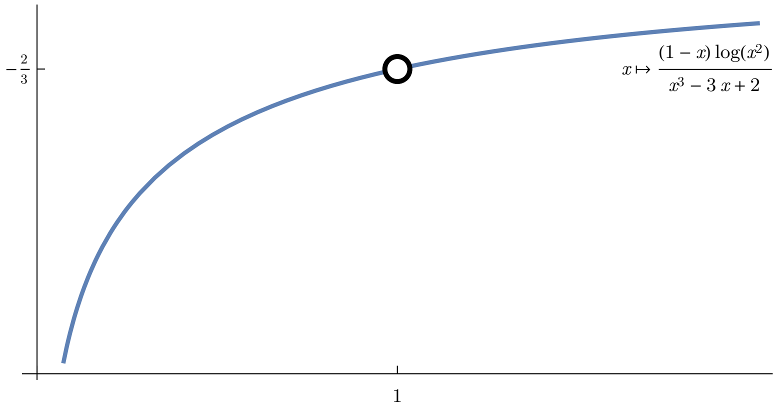
$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\log(x^2)}{x^3-3x+2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\log(x^2)}{(x-1)^2(x+2)} = -\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{(x-1)(x+2)} = \\
&= -\lim_{x\to 1} \frac{2\log x}{x-1} \cdot \frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to 1+2=3}} = -\frac{2}{3} \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}.
\end{aligned}
$$

Facciamo il cambio di variabile $y=x-1$, cioè $x=1+y$, in modo da riportarci alla situazione più familiare $y\to 0$:

$$
-\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = -\frac{2}{3}\frac{\log(1+y)}{y} = -\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{2}{3}.
$$

Si poteva fare la sostituzione $y=x-1$ anche nell'espressione di partenza, con conti un poco diversi.



j. Nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-3}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$$

il numeratore tende a $e-3<0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-3}{x-\sqrt{x^2-2x^3}} = (e-3)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-2x^3}}$$

e il denominatore tende a 0, per cui il limite è $\pm\infty$, col segno dipendente dal segno del denominatore. Esaminiamo meglio il denominatore:

$$x-\sqrt{x^2-2x^3} = x-\sqrt{x^2(1-2x)} = x-|x|\sqrt{1-2x} = \begin{cases} x-x\sqrt{1-2x} & \text{se } x>0, \\ x+x\sqrt{1-2x} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Il limite da sinistra è facile perché il denominatore è chiaramente negativo:

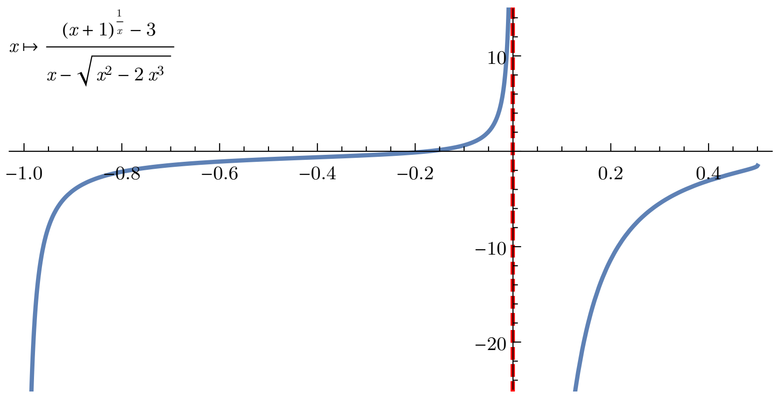
$$(e-3)\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-2x^3}} = (e-3)\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x+x\sqrt{1-2x}} = (e-3)\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\underbrace{1+\sqrt{1-2x}}_{\to 1+1=2}} =$$

$$= (e-3)(-\infty)(1/2) = +\infty.$$

Per quanto riguarda il limite da destra, un modo di risolvere il segno è di moltiplicare e dividere per la somma:

$$\begin{aligned}(e-3)\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-2x^3}} &= (e-3)\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sqrt{x^2-2x^3}}{(x-\sqrt{x^2-2x^3})(x+\sqrt{x^2-2x^3})} = \\ &= (e-3)\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x\sqrt{1-2x}}{x^2-(x^2-2x^3)} = \\ &= (e-3)\lim_{x\to 0^+}\frac{x\big(1+\sqrt{1-2x}\big)}{2x^3} = \\ &= (e-3)\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x^2}\cdot\big(\underbrace{1+\sqrt{1-2x}}_{\to 1+1=2}\big) = (e-3)(+\infty)\cdot 2 = -\infty.\end{aligned}$$

Concludiamo che il limite iniziale non esiste.



k. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{2\cos x - \sqrt{x+4}}$$

si presenta nella forma indeterminata 0/0. Proviamo a eliminare la radice quadrata moltiplicando e dividendo per la somma:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{2\cos x - \sqrt{x+4}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{(2\cos x - \sqrt{x+4})(2\cos x + \sqrt{x+4})} \cdot \underbrace{(2\cos x + \sqrt{x+4})}_{\to 2+2=4} = \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{(2\cos x)^2 - (x+4)} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{4\cos^2 x - x - 4} = \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{4(1-\operatorname{sen}^2 x) - x - 4} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{-4\operatorname{sen}^2 x - x} = \\
&= -4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{4\operatorname{sen}^2 x + x} = -4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{x} \cdot \frac{1}{\underbrace{4x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 + 1}_{\to 0+1}} = \\
&= -4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{x}.
\end{aligned}$$

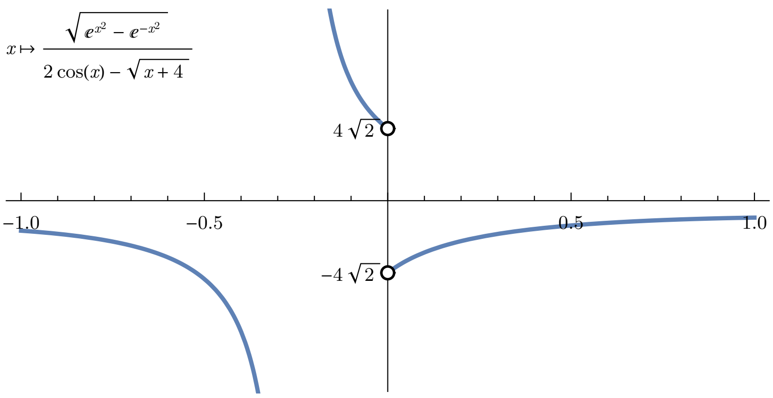
Per semplificare il numeratore cerchiamo di riportarci al limite notevole $(e^t-1)/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
-4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{x} &= -4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{-x^2}(e^{2x^2}-1)}}{x} = -4\lim_{x\to 0} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\to e^0=1} \cdot \frac{\sqrt{e^{2x^2}-1}}{x} = \\
&= -4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{2x^2}-1}}{x} = -4\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2 \cdot \frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}}{x} = -4\lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{2}}{x} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}}_{\to\sqrt{1}} = \\
&= -4\sqrt{2}\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.
\end{aligned}$$

A questo punto bisogna distinguere i limiti da sinistra e da destra:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{2\cos x - \sqrt{x+4}} &= -4\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -4\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = -4\sqrt{2}\cdot 1 = -4\sqrt{2}, \\
\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{e^{x^2}-e^{-x^2}}}{2\cos x - \sqrt{x+4}} &= -4\sqrt{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -4\sqrt{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -4\sqrt{2}\cdot(-1) = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Il limite di partenza non esiste.

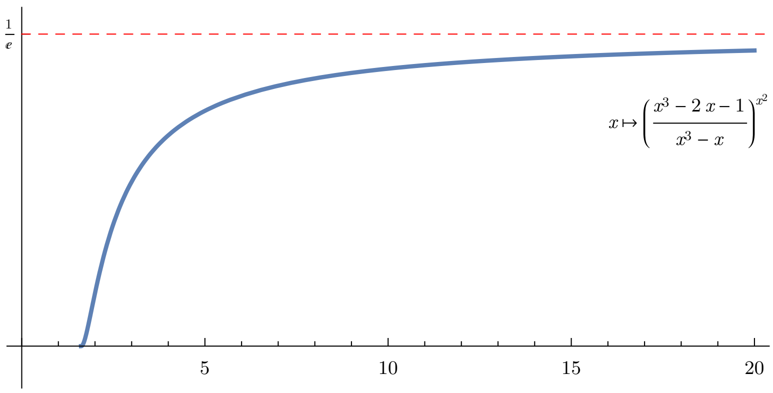


l. Il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}\right)^{x^2}$$

si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Riportiamoci al limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}\Big)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \exp\log\Big(\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}\Big)^{x^2} = \exp\lim_{x\to+\infty}\log\Big(\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}\Big)^{x^2} = \\
&= \exp\lim_{x\to+\infty} x^2\log\Big(\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}\Big) = \exp\lim_{x\to+\infty} x^2\log\Big(1+\frac{x^3-2x-1}{x^3-x}-1\Big) = \\
&= \exp\lim_{x\to+\infty} x^2\log\Big(1+\frac{x^3-2x-1-(x^3-x)}{x^3-x}\Big) = \\
&= \exp\lim_{x\to+\infty} x^2\log\Big(1+\underbrace{\frac{-x-1}{x^3-x}}_{\to 0}\Big) = \exp\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{-x-1}{x^3-x}\cdot\underbrace{\frac{\log\Big(1+\frac{-x-1}{x^3-x}\Big)}{\frac{-x-1}{x^3-x}}}_{\to 1} = \\
&= \exp\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{-x-1}{x^3-x} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3-x^2}{x^3-x} = \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-x^{-1}}{1-x^{-2}} = \\
&= \exp(-1) = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$



m. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{x^3-\sqrt{x^6-2x^5}}$$

al numeratore c'è $\cos x$ che è oscillante, e $x\,\mathrm{sen}\,4x$, che è il prodotto di x, che va a $+\infty$, per $\mathrm{sen}\,4x$, che è oscillante. Sembra quindi che il numeratore abbia oscillazioni sempre più ampie al crescere di x. In particolare il numeratore non pare avere limite. Il denominatore è della forma indeterminata $+\infty-\infty$, in cui i termini principali sono gli stessi. Cerchiamo di semplificarlo moltiplicando e dividendo per la somma:

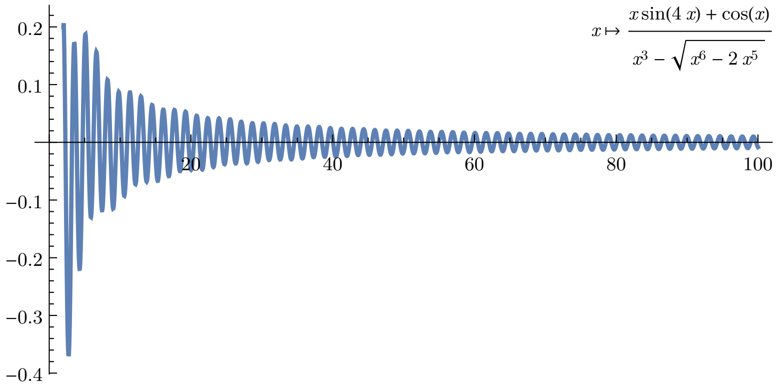
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{x^3-\sqrt{x^6-2x^5}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{\big(x^3-\sqrt{x^6-2x^5}\big)\big(x^3+\sqrt{x^6-2x^5}\big)}\cdot\big(x^3+\sqrt{x^6-2x^5}\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{x^6-(x^6-2x^5)}\cdot\big(x^3+\sqrt{x^6(1-2x^{-1})}\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{2x^5}\cdot\big(x^3+x^3\sqrt{1-2x^{-1}}\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{2x^5}\cdot x^3\underbrace{\big(1+\sqrt{1-2x^{-1}}\big)}_{\to 1+1=2} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,4x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\mathrm{sen}\,4x}{x}\Big).
\end{aligned}$$

Sapendo che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, per $x>0$ valgono le disuguaglianze

$$\overbrace{\frac{-1}{x^2}}^{\to 0} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}, \qquad \overbrace{\frac{-1}{x}}^{\to 0} \le \frac{\mathrm{sen}\,4x}{x} \le \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}.$$

Per il teorema del confronto quindi anche le funzioni comprese fra le disuguaglianze tendono a 0. Possiamo infine applicare il teorema del limite della somma:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\operatorname{sen}4x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}4x}{x}=0+0=0.$$



n. Nel limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$$

il numeratore si presenta nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$, e il denominatore in quella $-\infty+\infty$ con termini principali uguale. Cominciamo a semplificare il denominatore moltiplicando e dividendo per la differenza:

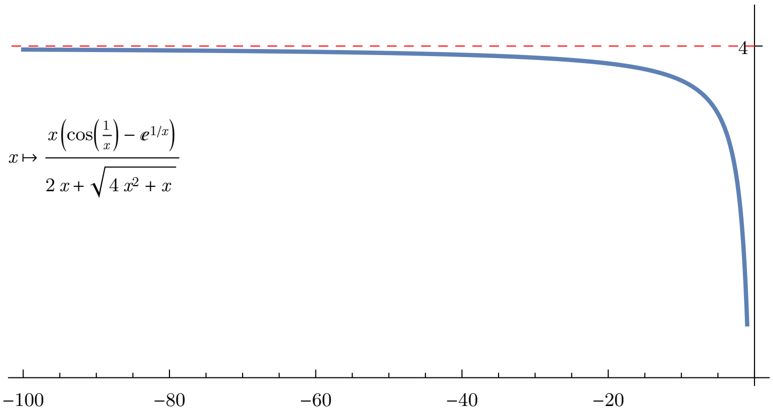
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)}\cdot\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)=\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{(2x)^2-(4x^2+x)}\cdot\left(2x-\sqrt{x^2(4+x^{-1})}\right)=\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{4x^2-4x^2-x}\cdot\left(2x-|x|\sqrt{4+x^{-1}}\right)=\\&=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{x}\cdot\left(2x-(-x)\sqrt{4+x^{-1}}\right)=\\&=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{x}\cdot\left(2x+x\sqrt{4+x^{-1}}\right)=\\&=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\cos(\frac{1}{x})-e^{1/x}\right)}{x}\cdot x\underbrace{\left(2+\sqrt{4+x^{-1}}\right)}_{\to 2+2=4}=\\&=-4\lim_{x\to-\infty}x\left(\cos\frac{1}{x}-e^{1/x}\right).\end{aligned}$$

Può convenire fare il cambio di variabile $t=1/x$, con $t\to 0^-$:

$$-4\lim_{x\to-\infty}x\left(\cos\frac{1}{x}-e^{1/x}\right)=-4\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}(\cos t-e^t)=-4\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos t-e^t}{t}.$$

Cerchiamo ora di riportarci ai limiti notevoli $(1-\cos t)/t^2\to 1/2$, $(e^t-1)/t\to 1$ per $t\to 0$:

$$\begin{aligned}-4\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos t-e^t}{t}&=-4\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos t-1+1-e^t}{t}=4\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos t+1-1+e^t}{t}=\\&=4\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos t+e^t-1}{t}=4\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\cos t}{t}+\frac{e^t-1}{t}\right)=\\&=4\lim_{x\to 0^-}\left(t\cdot\underbrace{\frac{1-\cos t}{t^2}}_{\to 1/2}+\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\to 1}\right)=4(0+1)=4.\end{aligned}$$



2. a. Per risolvere la disequazione

$$\frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1$$

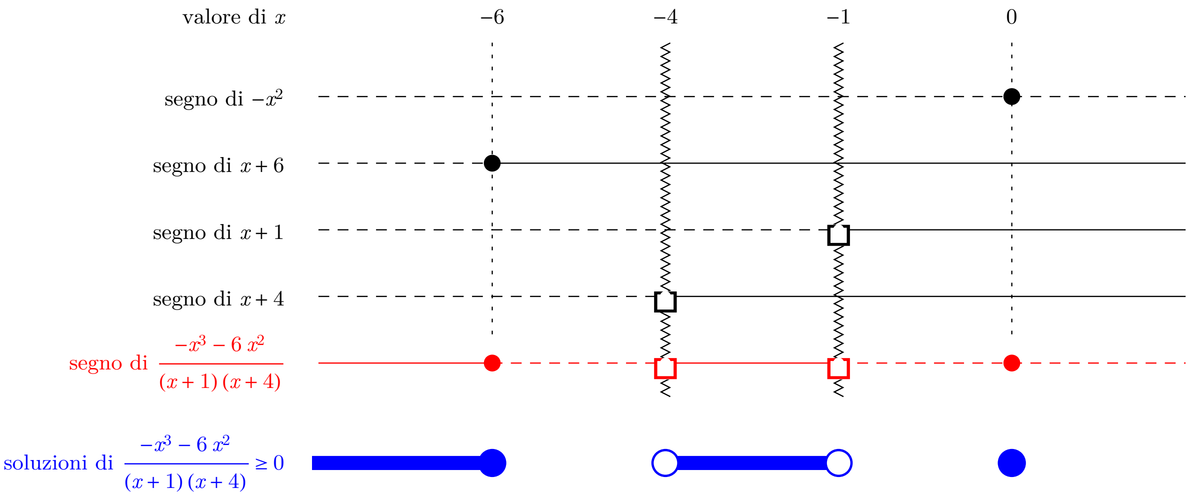
ci riportiamo alla regola dei segni portando tutto al primo membro

$$\frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} - x - 1 \geq 0,$$

e facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} - (x+1) &= \frac{32(x+1) - 5(x+4) - (x+1)3(x+1)(x+4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{32x + 32 - 5x - 20 - 3(x^2+2x+1)(x+4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{27x + 12 - 3(x^3 + 2x^2 + x + 4x^2 + 8x + 4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{27x + 12 - 3(x^3 + 6x^2 + 9x + 4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{27x + 12 - 3x^3 - 18x^2 - 27x - 12}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{-3x^3 - 18x^2}{3(x+1)(x+4)} = \frac{-3x^2(x+6)}{3(x+1)(x+4)} = \frac{-x^2(x+6)}{(x+1)(x+4)}. \end{aligned}$$

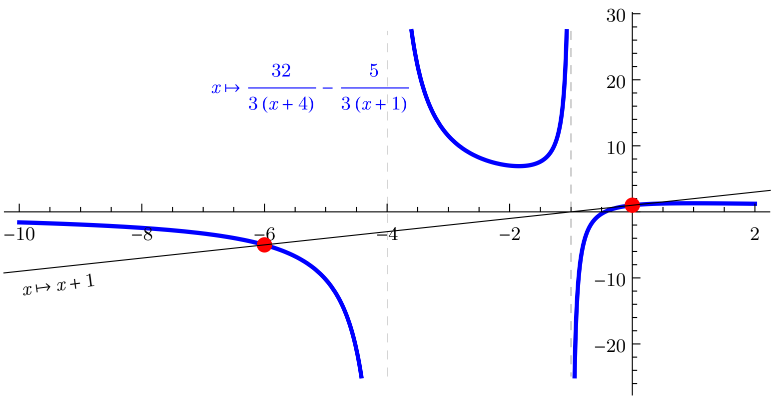
Che a nessuno venga in mente di "togliere x^2" perché è "positivo". Lo studio del segno e la soluzione della disequazione sono nello schema seguente:



Si intende che i tratti orizzontali (neri o rossi) continui significano segno $+$, quelli tratteggiati il segno $-$, i pallini neri significano il segno 0 al numeratore, i quadratini bucati un segno 0 al denominatore, la linea a zigzag verticale segnala punti dove non esiste l'espressione (tipicamente uno zero del denominatore). Le linee continue blu e i pallini pieni blu vogliono dire invece soluzioni della disequazione, mentre i pallini vuoti vogliono dire non soluzione.
Concludendo,

$$\frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -6 \vee -4 < x < -1 \vee x = 0.$$

Complemento. Per chi non si capacitasse della soluzione isolata $x = 0$, la figura seguente può essere illuminante: il grafico della funzione $x \mapsto \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)}$ è tangente alla retta $y = x + 1$ proprio nel punto di ascissa 0, mentre nei punti attorno sta sotto.



b. La disequazione

$$3\min\{x+1, \max\{-x-2, 2x\}\} \geq x$$

si può ricondurre all'unione di sistemi che non contengono max o min:

$$3\min\{x+1, \max\{-x-2, 2x\}\} \geq x \quad \Longleftrightarrow$$

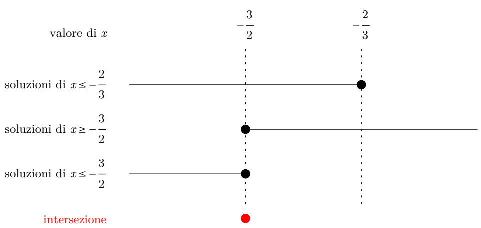
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -x-2 \geq 2x \\ 3\min\{x+1, -x-2\} \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -x-2 < 2x \\ 3\min\{x+1, 2x\} \geq x \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

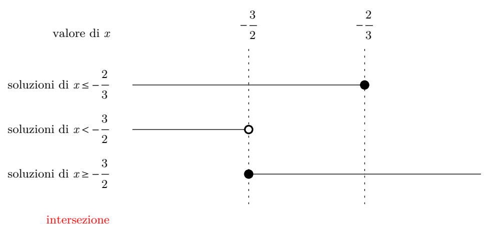
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -x-2 \geq 2x \\ x+1 \geq -x-2 \\ 3(-x-2) \geq x \end{cases} \vee \quad \begin{cases} -x-2 \geq 2x \\ x+1 < -x-2 \\ 3(x+1) \geq x \end{cases} \vee$$

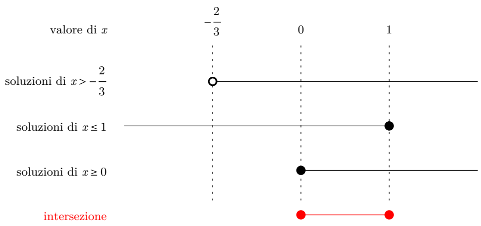
$$\vee \quad \begin{cases} -x-2 < 2x \\ x+1 \geq 2x \\ 3(2x) \geq x \end{cases} \vee \quad \begin{cases} -x-2 < 2x \\ x+1 < 2x \\ 3(x+1) \geq x \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

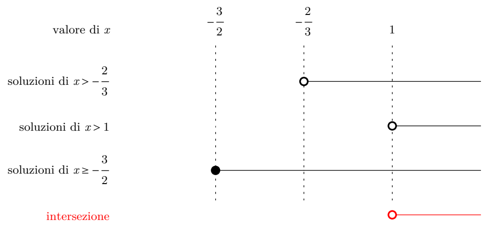
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x \geq 2 \\ 2x \geq -3 \\ -3x-6 \geq x \end{cases} \vee \quad \begin{cases} -3x \geq 2 \\ 2x < -3 \\ 3x+3 \geq x \end{cases} \vee \quad \begin{cases} -3x < 2 \\ -x \geq -1 \\ 6x \geq x \end{cases} \vee \quad \begin{cases} -3x < 2 \\ -x < -1 \\ 3x+3 \geq x \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -2/3 \\ x \geq -3/2 \\ x \leq -3/2 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x \leq -2/3 \\ x < -3/2 \\ x \geq -3/2 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x > -2/3 \\ x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x > -2/3 \\ x > 1 \\ x \geq -3/2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

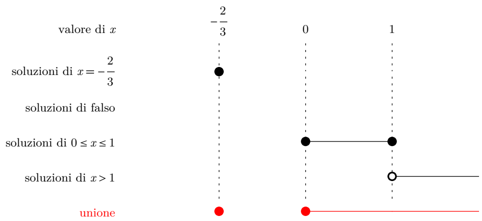






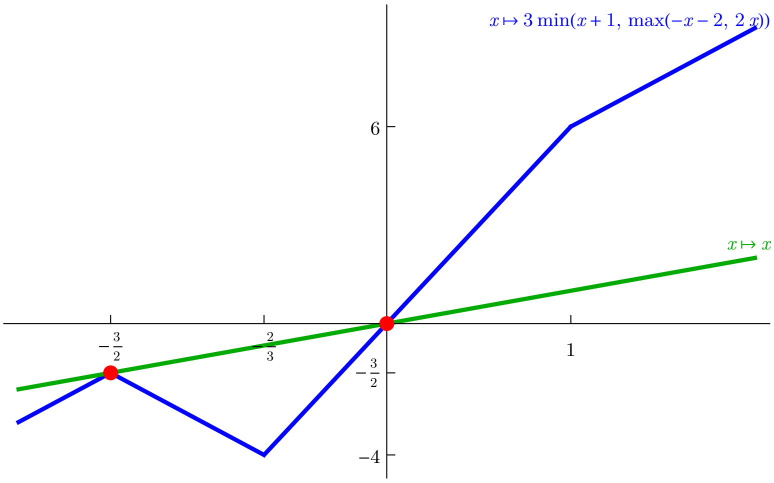


$$\iff \quad x=-\frac{3}{2} \quad \vee \quad \text{falso} \quad \vee \quad 0\le x\le 1 \quad \vee \quad x>1 \quad \iff$$



$$\iff \quad x=-\frac{3}{2} \quad \vee \quad x\ge 0\,.$$

Complemento. Un grafico delle due funzioni $x\mapsto 3\min\{x+1,\max\{-x-2,2x\}\}$ e $x\mapsto x$ può far capire la soluzione isolata $x=-3/2$: in quel punto la funzione vale 0, mentre nei punti attorno è negativa (il grafico è angoloso).



c. La disequazione

$$\sqrt{\frac{4-4x^2}{4x+5}}\le 2$$

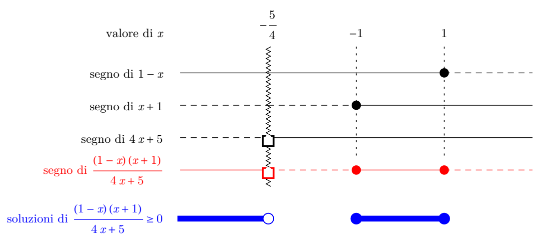
si presenta nella forma $\sqrt{A}\le B$, che equivale a un sistema che non contiene radicali:

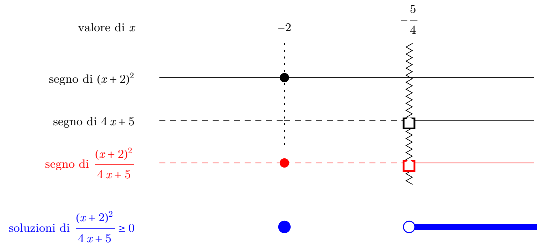
$$\sqrt{\frac{4-4x^2}{4x+5}}\le 2 \iff \begin{cases} \dfrac{4-4x^2}{4x+5}\ge 0\\ 2\ge 0\\ \dfrac{4-4x^2}{4x+5}\le 2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{4x+5}\ge 0\\ \text{vero}\\ \dfrac{4-4x^2}{4x+5}-4\le 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(1-x)(1+x)}{4x+5}\ge 0\\ \dfrac{4-4x^2-4(4x+5)}{4x+5}\le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(1-x)(1+x)}{4x+5}\ge 0\\ \dfrac{4-4x^2-16x-20}{4x+5}\le 0 \end{cases} \iff$$

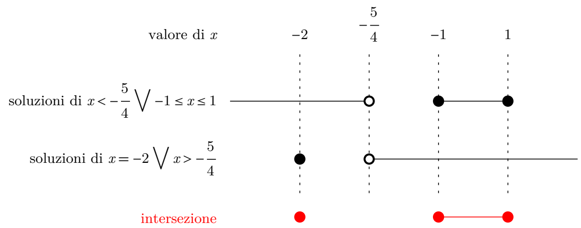
$$\iff \begin{cases} \dfrac{(1-x)(1+x)}{4x+5}\ge 0\\ \dfrac{-4x^2-16x-16}{4x+5}\le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(1-x)(1+x)}{4x+5}\ge 0\\ -4\dfrac{x^2+4x+4}{4x+5}\le 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(1-x)(1+x)}{4x+5} \geq 0 \\ \dfrac{(x+2)^2}{4x+5} \geq 0 \end{cases} \iff$$



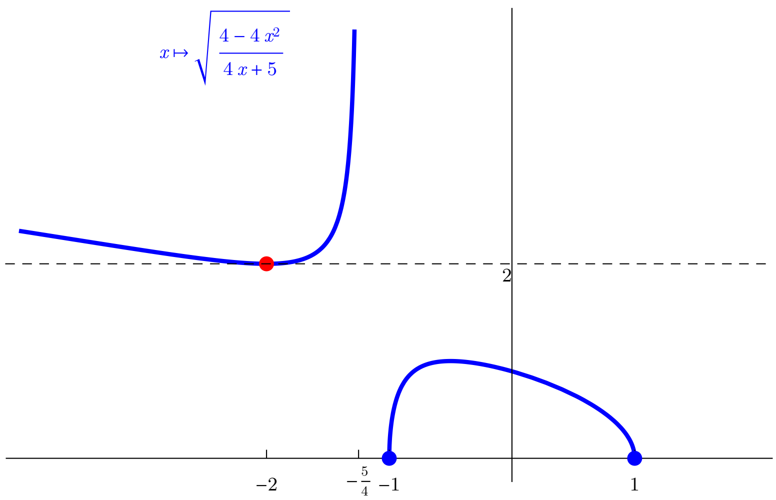


$$\iff \begin{cases} x < -\dfrac{5}{4} \quad \vee \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x = -2 \vee x > -\dfrac{5}{4} \end{cases} \iff$$



$$\iff \quad x = -2 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 1.$$

Complemento. Per capacitarsi della soluzione isolata -2 forse può aiutare un grafico della funzione $x \mapsto \sqrt{(4-4x^2)/(4x+5)}$:



4. Bisogna dimostrare per induzione che

$$2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) = \frac{(n+4)(5n+3)}{2}$$

quando $n \geq 1$. Il primo còmpito è di capire cosa vogliono dire i puntini di sospensione al primo membro della formula. Il pezzo $2n + (2n+1) + (2n+2)$ è la somma di tre numeri interi consecutivi a partire da $2n$. A destra dei puntini c'è $+3(n+1)$, che sembra l'ultimo addendo di una somma, ed è un numero intero. Sembra ragionevole che si intenda la somma di tutti i numeri interi da $2n$ a $3(n+1)$ compresi. Questo ha senso se $2n \leq 3(n+1)$, che equivale a $2n \leq 3n+3$, cioè $n \geq -3$, che per noi è verificato. Definiamo il predicato da dimostrare vero:

$$\mathcal{P}(n) := \left(2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) = \frac{(n+4)(5n+3)}{2} \right).$$

Il caso base è $\mathcal{P}(1)$. Per $n = 1$ il primo membro vale

$$\begin{aligned} 2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) &= 2\cdot 1 + (2\cdot 1+1) + (2\cdot 1+2) + \cdots + 3(1+1) = \\ &= 2+3+4+\cdots+6 = 2+3+4+5+6 = 20, \end{aligned}$$

mentre il secondo membro vale

$$\frac{(n+4)(5n+3)}{2} = \frac{(1+4)(5\cdot 1+3)}{2} = \frac{5\cdot 8}{2} = 20.$$

I due membri hanno lo stesso valore, per cui $\mathcal{P}(1)$ è vera. Per il passo induttivo scriviamo $\mathcal{P}(n)$ per disteso

$$\mathcal{P}(n): \qquad 2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) = \frac{(n+4)(5n+3)}{2}$$

che va confrontato con $\mathcal{P}(n+1)$

$$\mathcal{P}(n{+}1): \qquad 2(n{+}1) + \big(2(n{+}1){+}1\big) + \big(2(n{+}1){+}2\big) + \cdots + 3\big((n{+}1){+}1\big) = \frac{\big((n+1)+4\big)\big(5(n+1)+3\big)}{2}.$$

Svolgiamo le parentesi interne a $\mathcal{P}(n+1)$:

$$(2n+2) + (2n+3) + (2n+4) + \cdots + (3n+6) = \frac{(n+5)(5n+8)}{2},$$

Le somme ai primi membri di $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{P}(n+1)$ hanno dei termini in comune, che mettiamo in evidenza incolonnando i termini uguali:

$$\begin{aligned} &\overbrace{2n + (2n+1)}^{\substack{\text{in } \mathcal{P}(n) \text{ ma} \\ \text{non in } \mathcal{P}(n+1)}} + \overbrace{(2n+2) + (2n+3) + \cdots + (3n+3)}^{\text{in comune}} \\ &\qquad\qquad\qquad\;\; \underbrace{(2n+2) + (2n+3) + \cdots + (3n+3)}_{\text{in comune}} + \underbrace{(3n+4) + (3n+5) + (3n+6)}_{\substack{\text{in } \mathcal{P}(n+1) \text{ ma} \\ \text{non in } \mathcal{P}(n)}}. \end{aligned}$$

In comune ci sono tutti gli addendi compresi fra $2n + 2$ e $3n + 3$. I due addendi $2n + (2n + 1)$ compare nella prima riga ma non nella seconda. I quattro termini $(3n+4)+(3n+5)+(3n+6)$ sono nella seconda ma non nella prima. Quindi per passare dalla prima riga alla seconda si deve togliere $2n + (2n + 1)$ e aggiungere $(3n + 4) + (3n + 5) + (3n + 6)$. Facendo questa operazione ad *entrambi* i membri di $\mathcal{P}(n)$ otteniamo

$$\begin{aligned} &(2n+2) + (2n+3) + (2n+4) + \cdots + (3n+6) \overset{?}{=} \\ &\qquad \overset{?}{=} \frac{(n+4)(5n+3)}{2} - \Big(2n + (2n+1)\Big) + \Big((3n+4) + (3n+5) + (3n+6)\Big). \end{aligned}$$

Dobbiamo decidere se questa espressione è equivalente a $\mathcal{P}(n + 1)$. Manipoliamo il secondo membro per vedere se per caso coincide con quello che vorremmo, cioè $(n + 5)(5n + 8)/2$:

$$\begin{aligned} \frac{(n+4)(5n+3)}{2} &- \Big(2n + (2n+1)\Big) + \Big((3n+4) + (3n+5) + (3n+6)\Big) = \\ &= \frac{5n^2 + 3n + 20n + 12}{2} - 2n - 2n - 1 + 3n + 4 + 3n + 5 + 3n + 6 = \\ &= \frac{5n^2 + 23n + 12}{2} + 5n + 14 = \frac{5n^2 + 23n + 12 + 2(5n+14)}{2} = \\ &= \frac{5n^2 + 23n + 12 + 10n + 28}{2} = \frac{5n^2 + 33n + 40}{2}. \end{aligned}$$

Questo dovrebbe essere uguale a $(n + 5)(5n + 8)/2$. Applicando a questo la proprietà distributiva effettivamente viene

$$\frac{(n+5)(5n+8)}{2} = \frac{n^2 + 8n + 25n + 40}{2} = \frac{n^2 + 33n + 40}{2}.$$

Concludiamo che il passo induttivo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ è valido.
Alla formula $2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) = (n+4)(5n+3)/2$ si può arrivare direttamente, senza induzione, se si dà per nota la formula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Infatti a $2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1)$ si può arrivare partendo da $1 + 2 + 3 + \cdots 3(n+1)$ e togliendogli $1 + 2 + 3 + \cdots + (2n-1)$:

$$\begin{aligned}
2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) &= \Big(1 + 2 + \cdots 3(n+1)\Big) - \Big(1 + 2 + \cdots + (2n-1)\Big) = \\
&= \frac{\big(3(n+1)\big)\big(3(n+1)+1\big)}{2} - \frac{(2n-1)\big((2n-1)+1\big)}{2} = \\
&= \frac{3(n+1)(3n+4)}{2} - \frac{(2n-1)\cdot 2n}{2} = \\
&= \frac{3(3n^2+4n+3n+4) - (4n^2-2n)}{2} = \\
&= \frac{9n^2+21n+12-4n^2+2n}{2} = \\
&= \frac{5n^2+23n+12}{2}
\end{aligned}$$

che coincide effettivamente con

$$\frac{(n+4)(5n+3)}{2} = \frac{5n^2+3n+20n+12}{2} = \frac{5n^2+23n+12}{2}.$$

Questa procedura non induttiva è perfettamente corretta, ma l'esercizio chiedeva espressamente una dimostrazione per induzione.

4. Dimostrare che $7/4$ è l'estremo superiore dell'insieme

$$X = \left\{ \frac{1+4(-1)^n n}{2+3n} \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

significa dimostrare che $7/4$ è maggiorante e che non ci sono maggioranti più piccoli di $7/4$. Vediamo se $7/4$ è minorante, lavorando sulle disuguaglianze come se n fosse variabile reale, invece che intera:

n	$\frac{1+4(-1)^n n}{2+3n}$
-10	1.3929
-9	-1.4800
-8	1.4091
-7	-1.5263
-6	1.4375
-5	-1.6154
-4	1.5000
-3	-1.8571
-2	1.7500
-1	-5.0000
0	0.5000
1	-0.6000
2	1.1250
3	-1.0000
4	1.2143
5	-1.1176
6	1.2500
7	-1.1739
8	1.2692
9	-1.2069
10	1.2813

$$\frac{1+4(-1)^n n}{2+3n} \le \frac{7}{4} \iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{1+4n}{2+3n} \le \dfrac{7}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{1-4n}{2+3n} \le \dfrac{7}{4} \end{cases} \iff$$

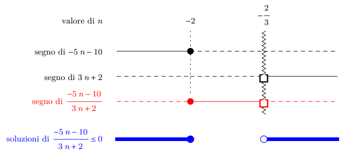
$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{1+4n}{2+3n} - \dfrac{7}{4} \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{1-4n}{2+3n} - \dfrac{7}{4} \le 0 \end{cases} \iff$$

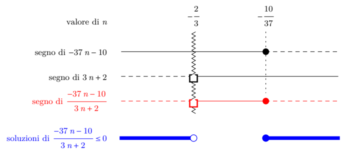
$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{4+16n-14-21n}{2+3n} \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{4-16n-14-21n}{2+3n} \le 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{-5n-10}{2+3n} \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{-37n-10}{2+3n} \le 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} n \text{ è pari} \\ n \le -2 \vee n > -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ n < -2/3 \vee n \ge -10/37 \end{cases} \iff$$

$$(n \text{ è pari}) \vee (n \text{ è dispari}) \iff n \in \mathbb{Z}.$$





Abbiamo usato il fatto che la condizione $n \leq -2 \vee n > -2/3$ lascia fuori soltanto il -1 fra gli interi, che però è dispari. La condizione $n < -2/3 \vee n \geq -10/37$ comprende tutti gli interi, sia pari che dispari.

Per decidere se $7/4$ è o no il massimo di X ripercorriamo i calcoli precedenti trasformando i "$\leq$" in "$=$": otteniamo che l'uguaglianza $(1 + 4(-1)^n n)/(2 + 3n) = 7/4$ vale per $n = -2$. Concludiamo che $7/4$ è il massimo di X.

Per decidere se -5 è estremo inferiore di X, cominciamo a verificare se -5 è minorante:

$$\frac{1+4(-1)^n n}{2+3n} \geq -5 \iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{1+4n}{2+3n} \geq -5 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{1-4n}{2+3n} \geq -5 \end{cases} \iff$$

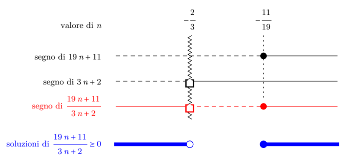
$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{1+4n}{2+3n} + 5 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{1-4n}{2+3n} + 5 \geq 0 \end{cases} \iff$$

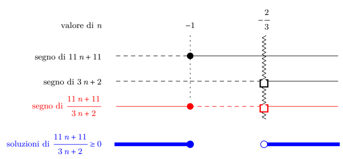
$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{1+4n+10+15n}{2+3n} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{1-4n+10+15n}{2+3n} \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \dfrac{19n+11}{2+3n} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \dfrac{11n+11}{2+3n} \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ n < -2/3 \vee n \geq -11/19 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ n \leq -1 \vee n > -2/3 \end{cases} \iff$$

$$(n \text{ è pari}) \vee (n \text{ è dispari}) \iff n \in \mathbb{Z}.$$

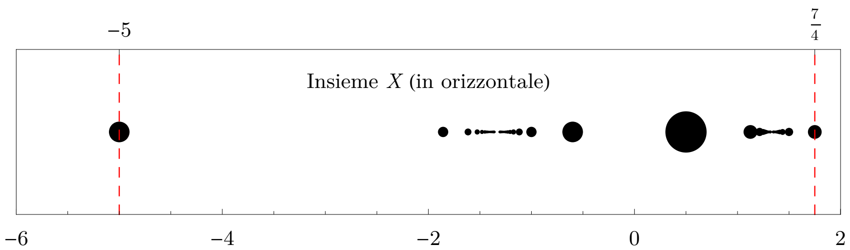


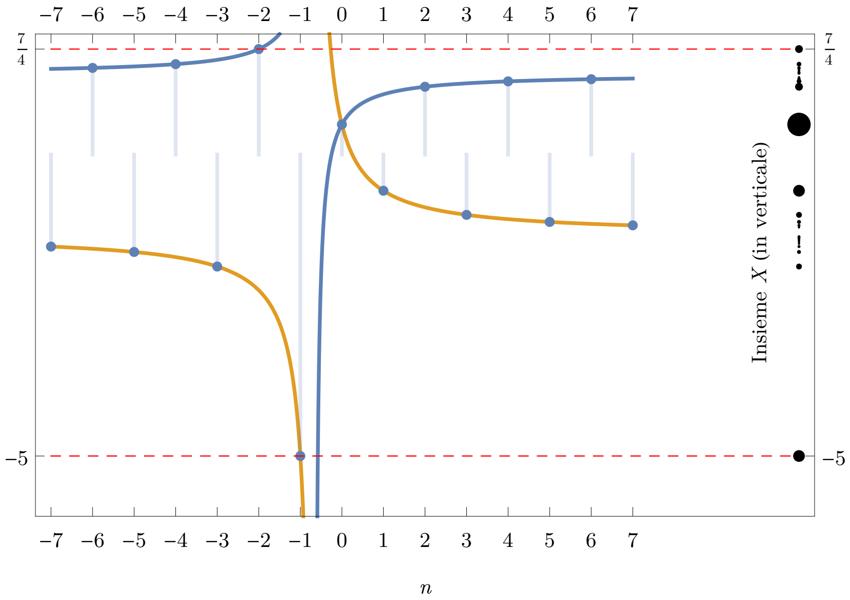


Si è usato il fatto che sia la condizione $n < -2/3 \vee n \geq -11/19$ che la $n \leq -1 \vee n > -2/3$ comprendono tutti i numeri interi, sia pari che dispari.

Ripercorrendo i conti con $= -5$ al posto di ≥ -5 si vede che l'uguaglianza vale per $n = -1$, che è dispari. Quindi -5 è il minimo di X.

Complemento. La struttura dell'insieme X:




−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
7/4
−5
Insieme X (in verticale)
n