Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 29 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(x+1)^{3/2} - 3e^{2x} + 4x(2x+1)\operatorname{sen} x - \cos x}{(\cos x - \cos 3x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)e^{2x} - 3(1+x)\log(1+x) + (x-1)\cos 2x}{\log\big(2-\sqrt{x^2+1}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\big(1-x^2\big)^{1/x} - 1}{|x| - 2x\sqrt{x+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \cos x}{2x - \sqrt{x^3+x^2}}$

2. Data la funzione $f(x) = 3x^2 + 3x - \log 2 + \log|3x^2 - 6x + 2|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità (gli zeri di f'' sono interi); **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente quattro punti, fra cui l'origine; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti):

$$\text{(a)}\ \frac{4x^3+x+3}{4x^2-4x+5},\ \text{(b)}\ -\frac{2x\operatorname{sen}(x^2)}{1+\cos^2(x^2)},\quad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2},\ \text{(d)}\ (e^{-x}+e^{x})\cos x.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-1)\sqrt{3x+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = (y^2-1)/3$.

5. Dimostrare per induzione che $\displaystyle\frac{(2n)!}{(n-2)!(n-1)!} \geq 4^n$ quando $n \geq 2$.

Punti: 4+3+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 29 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}(x^2+1) - 3(1-x)\log(1-x) - (x+1)\cos 2x}{\log\big(2-\sqrt{1-x^2}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{16(x+1)^{3/2} + 5x(x+1)\operatorname{sen} 2x - 8(3e^x - \cos x)}{\big(1-\sqrt{1+x}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\big(x^2+1\big)^{-1/x}}{|x| - x\sqrt{1+x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - 2\cos x}{3x - \sqrt{x^2+x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) = 3x^2 - 3x - \log 2 + \log|3x^2+6x+2|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità (gli zeri di f'' sono interi); **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente quattro punti, fra cui l'origine; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte):

$$\text{(a)}\ \frac{4x^3+x-1}{4x^2-4x+5}\,,\ \text{(b)}\ \frac{2x\cos(x^2)}{1+\operatorname{sen}^2(x^2)}\,,\ \text{(c)}\ \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,,\ \text{(d)}\ (e^{-x}+e^x)\operatorname{sen} x\,.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)\sqrt{3x+1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = \frac{1}{3}(y^2-1)$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{(2n+1)!}{(n-1)!n!} \geq 4^n$ quando $n \geq 1$.

Punti: 3+4+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 29 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{11(x-1)x\operatorname{sen} x - 8(x+1)^{3/2} + 4(3e^x - \cos 2x)}{\big(1-\sqrt{1-x}\big)(\cos x - \cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)\log(1-x) - (x+1)\cos 2x + e^{2x}(1-x^2)}{\log\big(2-\sqrt{1+x^2}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \cos^2 x}{4x - \sqrt{x^2 - x^3}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\big(1-x^2\big)^{1/x}}{|x| + x\sqrt{1-x}}$

2. Data la funzione $f(x) = 3x^2 - 24x + 4\log|3x^2 - 6x - 1|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità (gli zeri di f'' sono interi); **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente tre punti, fra cui l'origine; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

$$\text{(a)}\frac{4x^3-2x+3}{4x^2+4x+5},\quad \text{(b)}\frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x^2)}},\quad \text{(c)}\frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2},\ \text{(d)}(e^x-e^{-x})\cos x\,.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{3x-1}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = (1+y^2)/3$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} \geq 4^n$ quando $n \geq 0$.

Punti: 4+3+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 29 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{19x(x+1)\operatorname{sen} 2x - 16(1+x)^{3/2} - 24e^{-x} + 40\cos x}{(\cos 3x - \cos x)\big(1-\sqrt{x+1}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)e^{-x} + (2x+1)\log(2x+1) - (x+1)\cos x}{\log\big(2-\sqrt{1-x^2}\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\big(1-x^2\big)^{1/x} - 1}{|x| + 2x\sqrt{x+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \cos x}{2x - \sqrt{x^2 - x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) = 3x^2 + 24x + 4\log|3x^2+6x-1|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità (gli zeri di f'' sono interi); **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente tre punti, fra cui l'origine; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte):

$$\text{(a)}\frac{4x^3+2x-3}{4x^2+4x+5}\,,\quad \text{(b)} -\frac{2x\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2)}}\,,\ \text{(c)}\ \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2},\ \text{(d)}\ (e^x - e^{-x})\operatorname{sen} x\,.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}(2x+1)}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = (y^2+3)/2$.

5. Dimostrare per induzione che $\displaystyle\frac{(2n-1)!}{n!(n+1)!} \le 4^n$ quando $n \ge 1$.

Punti: 4+3+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.