Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 3 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(1+e^x)^2 + 8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x)}{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3-2\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x)\tan x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-2x^3}}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-\sqrt{x^3+x^2}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{9x^2-6x-3}{8x} + \log\Big|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\Big|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente due punti; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti): (a) $\dfrac{2x^3+x+3}{x^2-2x+5}$,

(b) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x} + \dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$, (c) $\dfrac{2\cos x - 2x\operatorname{sen} x}{4x^2\cos^2 x + 1}$, (d) $e^{-x}\operatorname{sen}^2 x$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(2t+2)$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{2}\log n \le 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \le 1 + \log n$.
(Può essere utile ricordare che $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$ decresce verso e).

Punti: 3+4+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 3 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2e^{-x} + (x^2-2x)(\operatorname{sen} x - \cos x) + 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3+3\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen} 3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(2-e^x)^2 - 2(x+1)^{3/2} + 2\cos(x^2-x)}{\sqrt{1+2x-x^2} - \sqrt{1+2x+x^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x^3}} + \frac{1}{x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{2x}) - (x+3)^x}{x - \sqrt{3x^3+x^2}}$

2. Data la funzione $f(x) = \log\Big|\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\Big| - \dfrac{9x^2+6x-3}{8x}$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente due punti; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte): (a) $\dfrac{x^3-x^2+4}{x^2-2x+5}$,

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x} - \dfrac{3}{(1+x^2)\arctan x}$, (c) $\dfrac{2\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{4x^2\operatorname{sen}^2 x + 1}$, (d) $e^{-x}\cos^2 x$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(2t-2)$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{2}\log n \le 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \le 1 + \log n$.
(Può essere utile ricordare che $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$ decresce verso e).

Punti: 4+3+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Prova Scritta del 3 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2+x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - x^2 e^{-x} - 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{(2x^3 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x(1+e^{-x})^2 - 8(1+x)^{3/2} + 8\cos(x^2+x)}{\sqrt{1+4x^2} - \sqrt{1-4x^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{-x} - e^{2x}) - (x+2)^x}{x - \sqrt{2x^3+x^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{\sqrt{x^2-2x^3}} + \frac{1}{x}\Big)$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{9x^2+6x-3}{8x} - \log\Big|\dfrac{x+3}{3x}\Big|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente due punti; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte) (a) $\dfrac{x^3-2x^2+2}{x^2+2x+5}$,

$$\text{(b)}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x} - \frac{2}{(1+x^2)\arctan x}, \quad \text{(c)}\frac{-\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2\operatorname{sen}^2 x + 1}, \ \text{(d)}e^{2x}\operatorname{sen}^2 x\,.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(4t+1)$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{2}\log n \le 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \le 1 + \log n$.
(Può essere utile ricordare che $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$ decresce verso e).

Punti: 4+3+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Prova Scritta del 3 luglio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono permessi libri e appunti cartacei ma non strumenti elettronici. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-2x^3)(\operatorname{sen} x - 2\cos x) - 2x^2 e^x - 2\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3 - 3\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x)\tan x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(1-x)^{3/2} - 2\cos(x^2+x) + 3x(2-e^{-x})^2}{\sqrt{2-x-x^2} - \sqrt{2-x+x^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2x^3}}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - (2-x)^x}{x - \sqrt{x^2 - x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{-9x^2-6x+3}{8x} - \log\Big|\dfrac{3-x}{3x}\Big|$, trovare **a)** il dominio e i limiti agli estremi del dominio; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **d)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **e)** dimostrare che la f si annulla in esattamente due punti; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte): (a) $\dfrac{2x^3+x^2-3}{x^2+2x+5}$,

$$\text{(b)}\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x} - \frac{1}{2(1+x^2)\arctan x}\,,\ \text{(c)}\ \frac{x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2\cos^2 x + 1},\ \text{(d)}\ e^{2x}\cos^2 x\,.$$

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(4t-1)$.

5. Dimostrare per induzione che $\dfrac{1}{2}\log n \le 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \le 1 + \log n$.
(Può essere utile ricordare che $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$ decresce verso e).

Punti: 4+3+3+3, 10, 3+3+2+4, 6, 7.