Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 19 giugno 2014

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen} x - 3\cos x) - 5x^2e^x - 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3-2x)(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x)\tan x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x} - e^x) - (x+2)^x}{x - \sqrt{x^3+x^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2-2x+1)\operatorname{sen} x \cos x - 3e^x(1-\cos x)}{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x)\log(1+x^2)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \sqrt{x^2-3x^3}}{1+\tan x - \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2x^3+x^2}} - \frac{1}{x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n)!}{(2n+1)!(3n)^n}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x^2-6x+4}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = -x^2 + 2\arctan\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio, eventuali simmetrie ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x) = 0$ soltanto per $x = \pm\sqrt{2}$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le funzioni $e^{1/x}$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}$, $(\log x)/x$, $\log(\frac{x+1}{x})$, $(5/2)^x$, e^{x^2}, $x^2\log x$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $x \to +\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti): (a) $\dfrac{3x^3-2x^2+x}{9x^2+6x+1}$,

(b) $\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x}$, (c) $(1-x)\operatorname{sen}(2x-x^2)$, (d) $\log^2 x - \log x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(2t+2)$.

Punti: 3+4+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 19 giugno 2014

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x(2-e^{-x})^2-2\cos(x^2+x)+2(1-x)^{3/2}}{\sqrt{1-x-x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x)(\operatorname{sen}x-\cos x)-2x^2e^{-x}-2\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3+3x)(\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}2x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(e^{-x}-e^{2x})-(x+2)^x}{x-\sqrt{2x^3+x^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x+1}-(x^2+2x+1)\operatorname{sen}x\cos 2x+3e^{-x}(1-\cos x)}{(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x)\log(1-x^2)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x+2\sqrt{x^2+4x^3}}{1+\tan x-\sqrt{\cos x}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n)!}{(2n)!(3n)^{n+1}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}\Big)$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+6x+4}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=x^2+2\arctan\Big(\dfrac{1}{x^2-1}\Big)-\dfrac{\pi}{2}-2$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty)=\pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1)=\pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio, eventuali simmetrie ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', crescenza/decrescenza, punti di massimo/minimo; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x)=0$ soltanto per $x=\pm\sqrt{2}$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le funzioni e^{x^2}, $e^{1/x}$, $x^2\log x$, $(\log x)/x$, $(5/2)^x$, $\big(1+\frac{1}{x}\big)^{x^3}$, $\log(\frac{x+1}{x})$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $x\to+\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte): (a) $\dfrac{2x^3-x^2+3x}{9x^2-6x+1}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsen x}-\dfrac{3}{(1+x^2)\arctan x}$, (c) $(x-1)\operatorname{sen}(2x-x^2)$, (d) $\log^2 x+\log x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x=-t^2/(2t-2)$.

Punti: 3+4+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 19 giugno 2014

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{x\to 0} \frac{2(x^2-x)(\operatorname{sen} x+\cos x)-x^2e^{-x}-2\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3-3x)(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen} 3x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x-e^{2x})-(x+3)^x}{x-\sqrt{3x^3+x^2}}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x-x^2)-2(x+1)^{3/2}+3x(2-e^x)^2}{\sqrt{1+x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x+1)\operatorname{sen} 2x\cos x-6e^x(1-\cos x)-2x\sqrt{x+1}}{(\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen} x)\log(1+x^2)}$

e) $\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}-\frac{1}{x}\Big)$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x-2\sqrt{x^2+4x^3}}{1-\tan x-\sqrt{\cos x}}$

g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!(3n)^n}{(3n)!}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+3x-3}{x^2-12x+9}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=-x^2+2\arctan\Big(\dfrac{1}{1-x^2}\Big)-\dfrac{\pi}{2}$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty)=\pm\pi/2$, $\arctan(\pm1)=\pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio, simmetrie, limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x)=0 \iff x=0$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le funzioni $(5/2)^x$, $e^{1/x}$, e^{x^2}, $\log(\frac{x+1}{x})$, $\big(1+\frac{1}{x}\big)^{x^3}$, $x^2\log x$, $(\log x)/x$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $x\to+\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte) (a) $\dfrac{-x^3+2x^2+2x}{9x^2-12x+4}$

(b) $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x}-\dfrac{2}{(1+x^2)\arctan x}$, (c) $(x^2-1)\cos(3x-x^3)$, (d) $\log x-\log^2 x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x=-t^2/(4t+1)$.

Punti: 4+3+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 19 giugno 2014

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. La brutta copia non va consegnata. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x-4x^3)(\operatorname{sen} x + 3\cos x) + x^2 e^x + 6\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3-3x)(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x)\tan x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - (2-x)^x}{x - \sqrt{x^2 - x^3}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8\cos(x^2+x) - 8(1+x)^{3/2} + 3x(1+e^{-x})^2}{\sqrt{1+4x^2} - \sqrt{1-4x^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x} - (x^2+2x+1)\operatorname{sen} x \cos x + 5e^{-x}(1-\cos x)}{(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x - 2\operatorname{sen} x)\log(1-x^2)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + \sqrt{4x^2 - x^3}}{1 + \tan x - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!(3n)^{n+1}}{(3n)!}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2x^3 + x^2}}\Big)$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 3}{x^2 + 12x + 9}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = x^2 - 2\arctan\Big(\dfrac{1}{1-x^2}\Big) + \dfrac{\pi}{2}$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$) trovare **a)** dominio, simmetrie, limiti agli estremi; **b)** eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x) = 0 \iff x = 0$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Si mettano in ordine le funzioni $(5/2)^x$, $e^{1/x}$, e^{x^2}, $\log(\frac{x+1}{x})$, $(\log x)/x$, $x^2 \log x$, $\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x^3}$, in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva per $x \to +\infty$.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte): (a) $\dfrac{-x^3 - x^2 + 3x}{9x^2 + 12x + 4}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x} - \dfrac{1}{2(1+x^2)\arctan x}$, (c) $(1-x^2)\operatorname{sen}(3x - x^3)$, (d) $\log^2 x + 2\log x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(4t-1)$.

Punti: 4+3+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 19 giugno 2014

Svolgimento

1. a. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore è un prodotto di differenze di radici, che si possono semplificare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{\left(\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}\right)\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2}\right)}_{\to 2+2} =$$

$$= 4 \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{4+x^2-(4-x^2)} =$$

$$= 4 \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{2x^2} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{x^2}$$

Non intravvedendo ulteriori semplificazioni, rimanendo una forma $0/0$ applichiamo L'Hôpital quante volte serve:

$$2 \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - 8\cos(x^2+x) + 3x(1+e^x)^2}{x^2} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8(3/2)(1-x)^{1/2}(-1) + 8(2x+1)\operatorname{sen}(x^2+x) + 3(1+e^x)^2 + 3x\cdot 2(1+e^x)e^x}{x} =$$

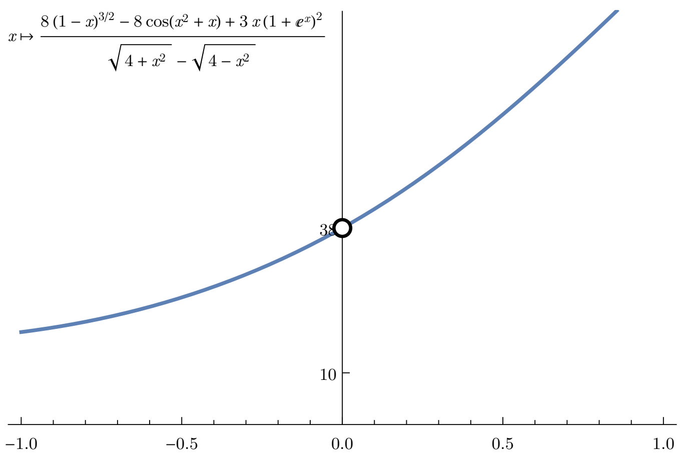
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-12(1-x)^{1/2} + 8(2x+1)\operatorname{sen}(x^2+x) + 3(1+e^x)^2 + 6x(e^x+e^{2x})}{x} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \Big(-12(1/2)(1-x)^{1/2}(-1) + 8\cdot 2\operatorname{sen}(x^2+x) + 8(2x+1)^2\cos(x^2+x) +$$

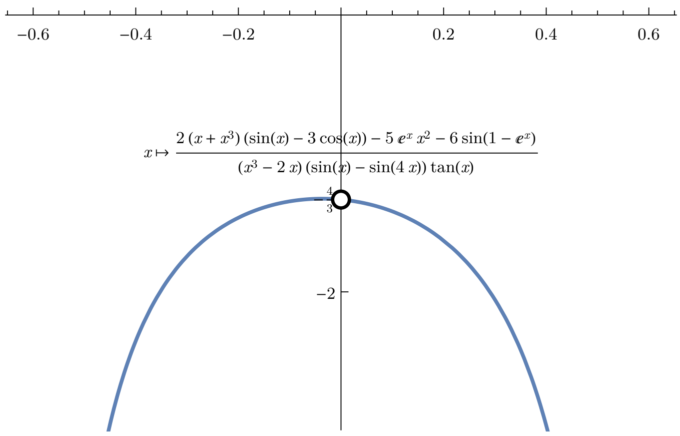
$$+ 3\cdot 2(1+e^x)e^x + 6(e^x+e^{2x}) + 6x(e^x+2e^{2x})\Big) =$$

$$= \Big(6 + 8\cdot 2\cdot 0 + 8(1)^2\cos 0 +$$

$$+ 6(1+1)1 + 6(1+1) + 6\cdot 0(1+2)\Big) = 6+8+12+12 = 38.$$



b. Il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3-2x)(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}4x)\tan x}$$
si presenta nella forma 0/0. Il denominatore si può semplificare sfruttando la formula $\tan x=(\operatorname{sen}x)/\cos x$ e il limite notevole $(\operatorname{sen}t)/t\to 1$ per $t\to 0$, e inoltre scomponendo il binomio x^3-2x nel prodotto $x(x^2-2)$, uno dei cui fattori non tende a 0:
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{(x^3-2x)(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}4x)\tan x}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}4x)x}\cdot\frac{1}{\underbrace{(x^2-2)\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{1}{\cos x}}_{\to -2\cdot 1\cdot 1}}=\\
&\quad=-\frac12\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^2(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}4x)}.
\end{aligned}$$
Il denominatore si può semplificare ulteriormente, di nuovo sfruttando il limite notevole $(\operatorname{sen}t)/t\to 1$:
$$\begin{aligned}
&-\frac12\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^2(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}4x)}=\\
&\quad=-\frac12\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^2(x\frac{\operatorname{sen}x}{x}-4x\frac{\operatorname{sen}4x}{4x})}=\\
&\quad=-\frac12\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^3}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}-4\frac{\operatorname{sen}4x}{4x}}_{\to 1-4}}=\\
&\quad=\frac16\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^3}.
\end{aligned}$$
Possiamo ora applicare la regola de L'Hôpital quante volte occorre:
$$\begin{aligned}
&\frac16\lim_{x\to 0}\frac{2(x^3+x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)-5x^2e^x-6\operatorname{sen}(1-e^x)}{x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=\frac16\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\Big(2(3x^2+1)(\operatorname{sen}x-3\cos x)+2(x^3+x)(\cos x+3\operatorname{sen}x)-\\
&\qquad\qquad-10xe^x-5x^2e^x-6(-e^x)\cos(1-e^x)\Big)=\\
&\quad=\frac1{18}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(2(3x^2+1)(\operatorname{sen}x-3\cos x)+2(x^3+x)(\cos x+3\operatorname{sen}x)-\\
&\qquad\qquad-(10x+5x^2)e^x+6e^x\cos(1-e^x)\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=\frac1{18}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\Big(12x(\operatorname{sen}x-3\cos x)+2(3x^2+1)(\cos x+3\operatorname{sen}x)+\\
&\qquad\qquad+2(2x^2+1)(\cos x+3\operatorname{sen}x)+2(x^3+x)(-\operatorname{sen}x+3\cos x)-\\
&\qquad\qquad-(10+10x)e^x-(10x+5x^2)e^x+6e^x\cos(1-e^x)+6e^x(-e^x)\big(-\operatorname{sen}(1-e^x)\big)\Big)=\\
&\quad=\frac1{36}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big((12x-2x^3-2x)(\operatorname{sen}x-3\cos x)+4(3x^2+1)(\cos x+3\operatorname{sen}x)-\\
&\qquad\qquad-(10+20x+5x^2)e^x+6e^x\cos(1-e^x)+6e^{2x}\operatorname{sen}(1-e^x)\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=\frac1{36}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1}\Big((10-6x^2)(\operatorname{sen}x-3\cos x)+(10x-2x^3)(\cos x+3\operatorname{sen}x)+\\
&\qquad\qquad+4\cdot 6x(\cos x+3\operatorname{sen}x)+4(3x^2+1)(-\operatorname{sen}x+3\cos x)-\\
&\qquad\qquad-(20+10x)e^x-(10+20x+5x^2)e^x+6e^x\cos(1-e^x)+6e^x(-e^x)\big(-\operatorname{sen}(1-e^x)\big)+\\
&\qquad\qquad+12e^{2x}\operatorname{sen}(1-e^x)+6e^{2x}(-e^x)\cos(1-e^x)\Big)=\\
&\quad=\frac1{36}\Big((10)(-3)+0+0+4(1)(3)-(20)1-(10)1+6+0+0+6(-1)1\Big)=\frac{-48}{36}=-\frac43.
\end{aligned}$$



c. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-\sqrt{x^3+x^2}}$$

si presenta nella forma

$$\frac{\cos(1-1)-(0+2)^0}{0-0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Raccogliamo il fattore x^2 dentro la radice e portiamolo fuori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-\sqrt{x^3+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-\sqrt{x^2(x+1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-|x|\sqrt{x+1}}.$$

Visto il valore assoluto $|x|$ distinguiamo i limiti destro e sinistro. Cominciamo dal destro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-|x|\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-x\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x\big(1-\sqrt{x+1}\big)}.$$

La radice quadrata al denominatore tende a zero e si può eliminare moltiplicando per $1+\sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x\big(1-\sqrt{x+1}\big)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x\big(1-\sqrt{x+1}\big)\big(1+\sqrt{x+1}\big)} \cdot \overbrace{\big(1+\sqrt{x+1}\big)}^{\to 1+1} = \\ &= 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x\big(1-(x+1)\big)} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x^2}.\end{aligned}$$

Usiamo la regola de L'Hôpital quante volte serve, stando attenti al termine $(x+2)^x$ in cui sia base che esponente dipendono da x:

$$\begin{aligned}-2\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x^2} &= -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-e^{x\log(x+2)}}{x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\ &= -2\lim_{x\to 0^+} \frac{-(2e^{2x}-e^x)\,\mathrm{sen}(e^{2x}-e^x)-e^{x\log(x+2)}\big(\log(x+2)+x\cdot\frac{1}{x+2}\big)}{2x} = \\ &= -2\frac{-(2-1)\,\mathrm{sen}(1-1)-e^0(\log(2)+0)}{0^+} = -2\frac{\log 2}{0^+} = -\infty.\end{aligned}$$

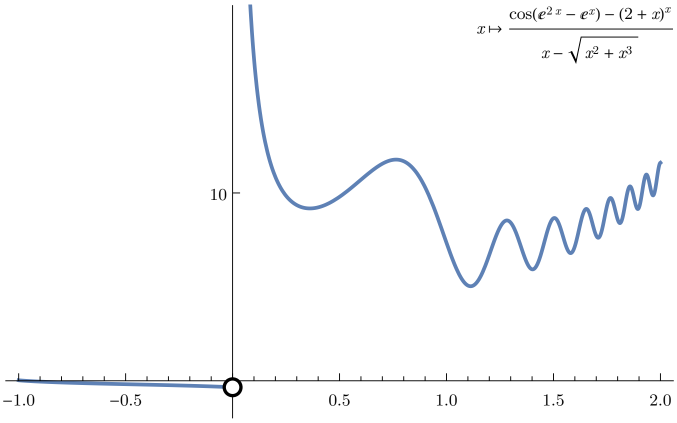
Passiamo al limite sinistro:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x-|x|\sqrt{x+1}} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x+x\sqrt{x+1}} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x} \cdot \frac{1}{\underbrace{1+\sqrt{x+1}}_{\to 1+1}} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x}.\end{aligned}$$

Di nuovo è una forma indeterminata $0/0$. Applichiamo la regola de L'Hôpital:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(e^{2x}-e^x)-(x+2)^x}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(e^{2x}-e^x)-e^{x\log(x+2)}}{x} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{-(2e^{2x}-e^x)\operatorname{sen}(e^{2x}-e^x)-e^{x\log(x+2)}(\log(x+2)+x\cdot\frac{1}{x+2})}{1} =\\
&= \frac{1}{2}\frac{-(2-1)\operatorname{sen}(1-1)-e^0(\log(0+2)+0)}{1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\log 2}{1} = -\frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}
$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Il limite di partenza non esiste.



d. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x}-(x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x-3e^x(1-\cos x)}{(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x)\log(1+x^2)}$$

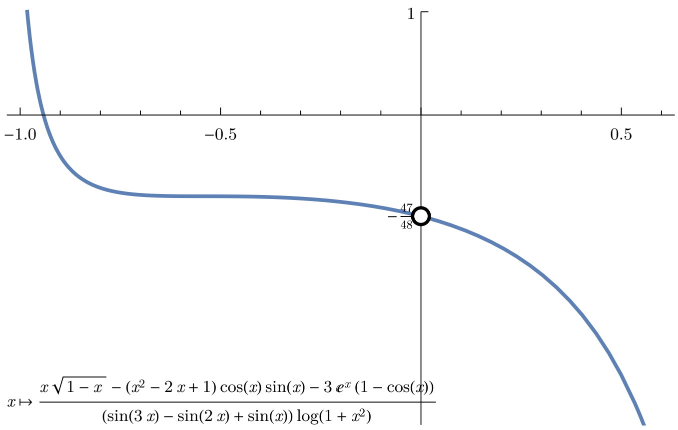
si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore si può semplificare usando i limiti notevoli $(\operatorname{sen}t)/t\to 1$ e $(\log(1+t))/t\to 1$ per $t\to 0$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x}-(x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x-3e^x(1-\cos x)}{(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x)\log(1+x^2)} =\\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x}-(x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x-3e^x(1-\cos x)}{(x\frac{\operatorname{sen}x}{x}-2x\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}+3x\frac{\operatorname{sen}3x}{3x})x^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}}_{\to 1} =\\
&\quad= \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x}-(x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x-3e^x(1-\cos x)}{x\cdot x^2}\cdot\frac{1}{\underbrace{(\frac{\operatorname{sen}x}{x}-2\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}+3\frac{\operatorname{sen}3x}{3x})}_{\to 1(1-2+3)}} =\\
&\quad= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x}-(x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x-3e^x(1-\cos x)}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Applichiamo la regola de L'Hôpital quante volte serve:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x}-(x^2-2x+1)\operatorname{sen}x\cos x-3e^x(1-\cos x)}{x^3} =\\
&\quad= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)^{1/2}-\frac{1}{2}(x-1)^2\operatorname{sen}2x-3e^x(1-\cos x)}{x^3} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\Big((1-x)^{1/2}+x(1/2)(1-x)^{-1/2}(-1)-\frac{1}{2}2(x-1)\operatorname{sen}2x-\frac{1}{2}(x-1)^2 2\cos 2x-\\
&\qquad\qquad -3e^x(1-\cos x)-3e^x\operatorname{sen}x\Big) =\\
&\quad= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big((1-x)^{1/2}-\frac{1}{2}x(1-x)^{-1/2}-(x-1)\operatorname{sen}2x-(x-1)^2\cos 2x-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad - 3e^x(1-\cos x+\operatorname{sen} x)\Big) \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\Big(\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-1)-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}-\frac{1}{2}x(-1/2)(1-x)^{-3/2}(-1)- \\
&\qquad -\operatorname{sen}2x-(x-1)2\cos 2x-2(x-1)\cos 2x-(x-1)^2(-2\operatorname{sen}2x)- \\
&\qquad -3e^x(1-\cos x+\operatorname{sen}x)-3e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)\Big) = \\
&= \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(-(1-x)^{-1/2}-\frac{1}{4}x(1-x)^{-3/2}- \\
&\qquad -\operatorname{sen}2x-4(x-1)\cos 2x+2(x-1)^2\operatorname{sen}2x- \\
&\qquad -3e^x(1+2\operatorname{sen}x)\Big) \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1}\Big(-(-1/2)(1-x)^{-3/2}(-1)-\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}-\frac{1}{4}x(-3/2)(1-x)^{-5/2}(-1)- \\
&\qquad -2\cos 2x-4\cos 2x-4(x-1)(-2\operatorname{sen}2x)+4(x-1)\operatorname{sen}2x+2(x-1)^2 2\cos 2x- \\
&\qquad -3e^x(1+2\operatorname{sen}x)-3e^x(2\cos x)\Big) = \\
&= \frac{1}{12}\Big(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0- \\
&\qquad -2-4-0+0+4- \\
&\qquad -3-6\Big) = \\
&= -\frac{47}{48}.
\end{aligned}
$$



e. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{1+\tan x-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Possiamo semplificare il denominatore moltiplicando per un'espressione che tende a una costante diversa da 0 e che elimina la radice quadrata:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{1+\tan x-\sqrt{1+\operatorname{sen}x}} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{(1+\tan x-\sqrt{1+\operatorname{sen}x})(1+\tan x+\sqrt{1+\operatorname{sen}x})}\cdot \overbrace{(1+\tan x+\sqrt{1+\operatorname{sen}x})}^{\to 1+1} = \\
&\quad = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{(1+\tan x)^2-(1+\operatorname{sen}x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{1+\tan^2 x+2\tan x-1-\operatorname{sen}x} = \\
&\quad = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}+2\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\operatorname{sen}x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}+2\frac{1}{\cos x}-1}_{\to 0+2-1}} =
\end{aligned}
$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{x}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\to 1}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{x^2-3x^3}}{x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\to 1}+\frac{\sqrt{x^2-3x^3}}{x}\right) = 2+2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x^3}}{x} = 2+2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(1-3x)}}{x} =$$

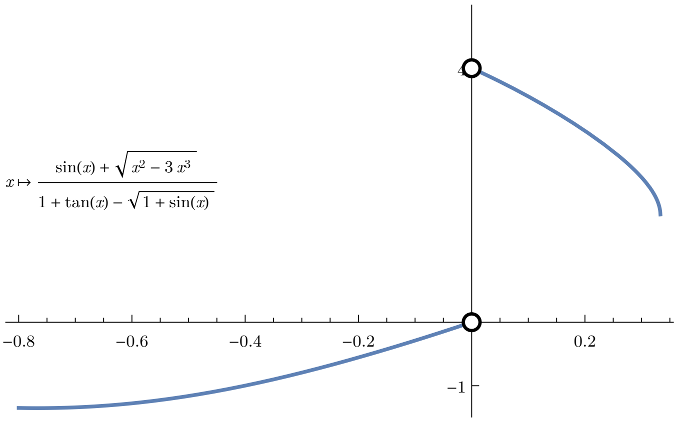
$$= 2+2\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\cdot\underbrace{\sqrt{1-3x}}_{\to 1} = 2+2\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Poiché c'è un valore assoluto di x, distinguiamo il limite da sinistra e da destra:

$$2+2\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = 2+\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = 2-2 = 0$$

$$2+\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 2+2\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 2+2 = 4.$$

I due limiti unilaterali sono diversi. Concludiamo che il limite iniziale non esiste.



f. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^3+x^2}}-\frac{1}{x}\right)$$

si presenta nella forma $\infty-\infty$. Il secondo infinito è chiaramente $\pm\infty$ a seconda di come x tende a 0. Distinguiamo i limiti sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^3+x^2}}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2(2x+1)}}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= +\infty\cdot 1-(-\infty) = +\infty,$$

e il limite destro:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^3+x^2}}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sqrt{2x^3+x^2}}{x\sqrt{2x^3+x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-|x|\sqrt{2x+1}}{x|x|}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}_{\to 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-x\sqrt{2x+1}}{x\cdot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}.$$

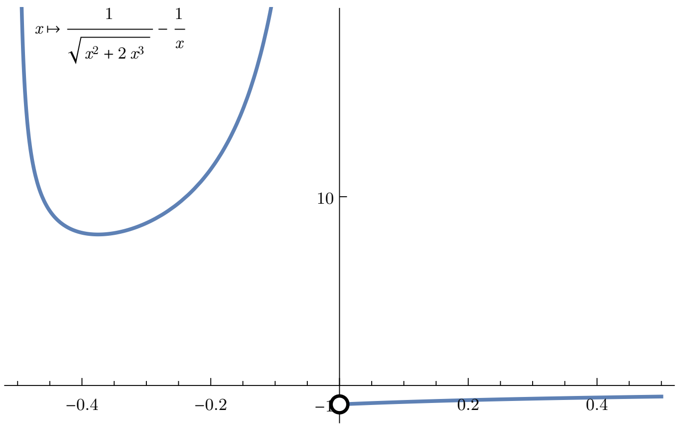
Siamo arrivati a una forma indeterminata $0/0$, che si può sbrogliare per esempio moltiplicando per un fattore che elimini la radice:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}}_{\to 1+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1^2-(2x+1)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2x-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1.$$

Essendo diversi i limiti da sinistra e da destra, il limite iniziale non esiste.



g. Il limite

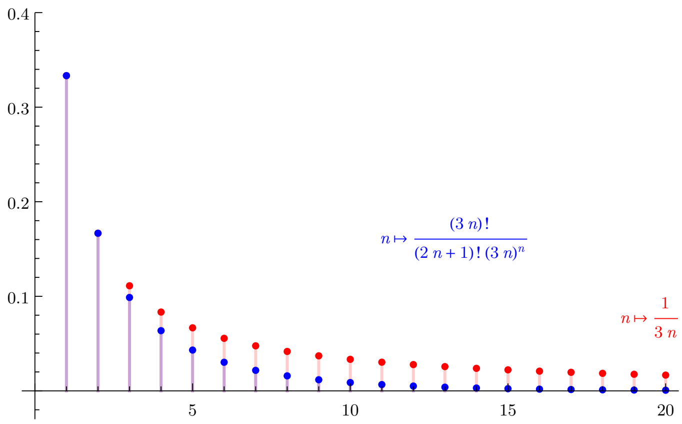
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n)!}{(2n+1)!(3n)^n}$$

si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Scrivendo per esteso i fattoriali si può cancellare il fattore $(2n-1)!$ e poi si possono raggruppare i fattori rimasti e maggiorare:

n	$\frac{(3n)!}{(2n+1)!(3n)^n}$
1	0.333333
2	0.166667
3	0.098765
4	0.063657
5	0.043141
6	0.030229
7	0.021692
8	0.015847
9	0.011739
10	0.008792
11	0.006646
12	0.005061
13	0.003879
14	0.002990
15	0.002315
16	0.001800
17	0.001405
18	0.001100
19	0.000864
20	0.000680

$$\begin{aligned}
\frac{(3n)!}{(2n+1)!(3n)^n} &= \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+2)\,\overbrace{(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots 2\cdot 1}^{=(2n+1)!}}{(2n+1)!(3n)^n}\\
&= \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+2)}{(3n)^n} =\\
&= \frac{\overbrace{(3n)(3n-1)\cdots(2n+2)}^{3n-(2n+1)\ \text{fattori}}}{(3n)^n} =\\
&= \frac{\overbrace{(3n)(3n-1)\cdots(2n+2)}^{n-1\ \text{fattori}}}{\underbrace{(3n)(3n)(3n)\cdots(3n)}_{n-1\ \text{fattori}}}\cdot\frac{1}{3n} =\\
&= \underbrace{\frac{3n}{3n}\cdot\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n-2}{3n}\cdots\frac{3n-(n-3)}{3n}\cdot\frac{3n-(n-2)}{3n}}_{\text{ciascun numeratore è}\ \le\ \text{del denominatore}}\cdot\frac{1}{3n} \le\\
&\le 1\cdot\frac{1}{3n} = \frac{1}{3n}.
\end{aligned}$$

Poiché $1/(3n) \to 0$ per $n \to +\infty$, per il teorema del confronto il limite cercato esiste ed è 0.



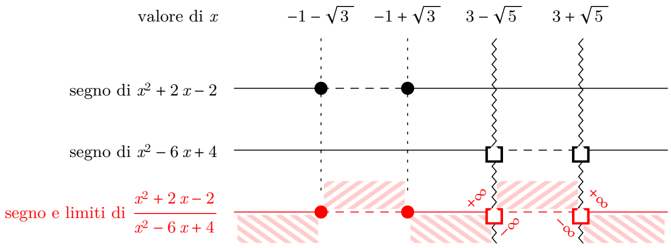
2. a. La funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 6x + 4}$$

è definita dove il denominatore non si annulla. Il discriminante (ridotto) del denominatore è $\Delta/4 = 3^2 - 1 \cdot 4 = 9 - 4 = 5$. Gli zeri del denominatore sono $x = 3 \pm \sqrt{5}$, e il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{3 \pm \sqrt{5}$.
Il discriminante (ridotto) del numeratore è $\Delta/4 = 1^2 - (-2) = 3$, e quindi il numeratore si annulla per $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Gli zeri del numeratore e denominatore sono nell'ordine seguente:

$$-1 - \sqrt{3} < -1 + \sqrt{3} < 3 - \sqrt{5} < 3 + \sqrt{5}.$$

Il segno di f si studia con lo schema seguente:

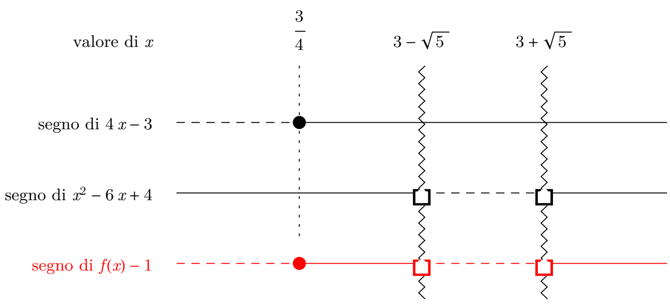


b. I limiti in $3 \pm \sqrt{5}$ sono indicati nello schema precedente. I rimanente estremi del dominio sono $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 6x + 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + 2\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2}}{1 - 6\frac{1}{x} + 5\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 1.$$

c. Dai risultati precedenti deduciamo senza altri calcoli che gli asintoti verticali sono le rette $x = 3 \pm \sqrt{5}$, e l'asintoto orizzontale è la retta $y = 1$. Non ce ne sono di obliqui, poiché c'è l'orizzontale. Può avere interesse la posizione della funzione rispetto all'asintoto orizzontale:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 6x + 4} - 1 = \frac{x^2 + 2x - 2 - (x^2 - 6x + 4)}{x^2 - 6x + 4} = \frac{8x - 6}{x^2 - 6x + 4}.$$



Quindi il grafico della funzione attraversa l'asintoto per $x = 3/4$, sta sotto se $x < 3/4 \vee 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}$ e sta sopra nel resto del dominio.

d. La derivata di f è

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2 - 6x + 4) - (x^2 + 2x - 2)(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 4)^2} = \\
&= \frac{2x^3 - 12x^2 + 8x + 2x^2 - 12x + 8 - (2x^3 - 6x^2 + 4x^2 - 12x - 4x + 12)}{(x^2 - 6x + 4)^2} = \\
&= \frac{2x^3 - 10x^2 - 4x + 8 - 2x^3 + 2x^2 + 16x - 12}{(x^2 - 6x + 4)^2} = \frac{-8x^2 + 12x - 4}{(x^2 - 6x + 4)^2} \\
&= 4\frac{-2x^2 + 3x - 1}{(x^2 - 6x + 4)^2}.
\end{aligned}$$

Il discriminante del numeratore $-2x^2+3x-1$ è $\Delta = 3^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-1) = 9-8 = 1$, e quindi $f'(x)$ si annulla per

$$x = \frac{-3 \mp 1}{-4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2. \end{cases}$$

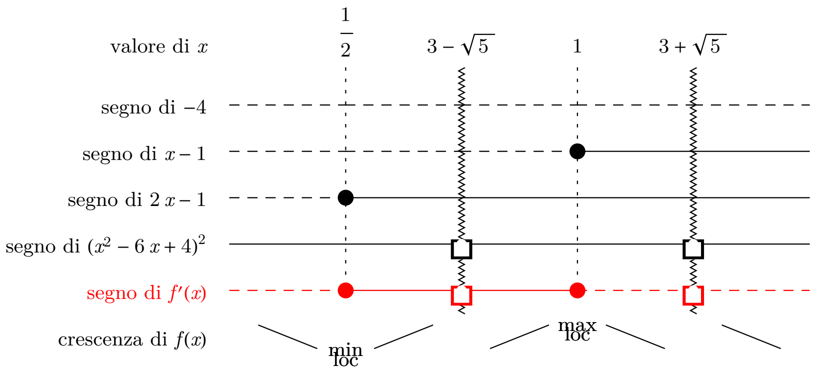
Gli zeri del numeratore e del denominatore sono nell'ordine seguente:

$$-1-\sqrt{3} < -1+\sqrt{3} < 3-\sqrt{5} < 3+\sqrt{5}.$$

Mettere in ordine $-1+\sqrt{3} \approx 0{,}732$ e $3-\sqrt{5} \approx 0{,}764$ non è ovvio, perché i due numeri sono molto vicini. Un modo simbolico rigoroso per stabilire l'ordine è il seguente:

$$-1+\sqrt{3} \gtreqless 3-\sqrt{5} \iff \sqrt{3}+\sqrt{5} \gtreqless 4 \iff 3+5+\sqrt{15} \gtreqless 16 \iff$$
$$\iff \sqrt{15} \gtreqless 8 \iff 15 \gtreqless 64.$$

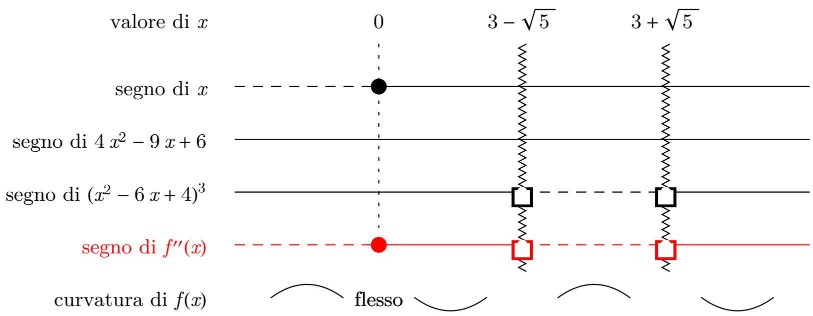
Lo studio del segno di $f'(x)$ e della monotonia di f è nello schema seguente.



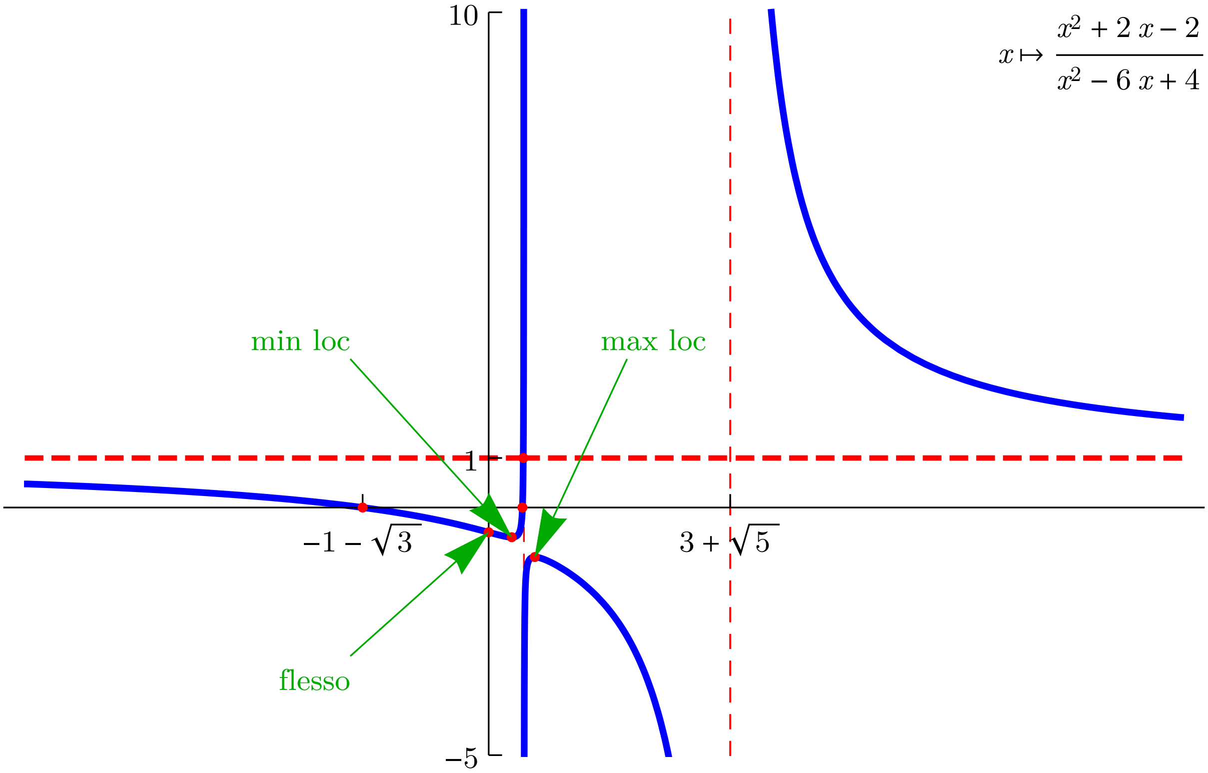
e. Nel calcolo della derivata seconda conviene raccogliere il fattore comune e semplificare prima di moltiplicare:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\frac{(-4x+3)(x^2-6x+4)^2 - (-2x^2+3x-1)2(x^2-6x+4)(2x-6)}{(x^2-6x+4)^4} = \\ &= 4\frac{(-4x+3)(x^2-6x+4) - (-2x^2+3x-1)2(2x-6)}{(x^2-6x+4)^3} = \\ &= 4\frac{-4x^3+24x^2-16x+3x^2-18x+12-(-8x^3+24x^2+12x^2-36x-4x+12)}{(x^2-6x+4)^3} = \\ &= 4\frac{-4x^3+27x^2-34x+12+8x^3-36x^2+40x-12}{(x^2-6x+4)^3} = \\ &= 4\frac{4x^3-9x^2+6x}{(x^2-6x+4)^3} = \frac{4x(4x^2-9x+6)}{(x^2-6x+4)^3}. \end{aligned}$$

Il polinomio $4x^2-9x+6$ ha discriminante $\Delta = 9^2-4\cdot 4\cdot 6 = 81-96 = -15 < 0$, e il primo coefficiente è > 0, per cui $4x^2-9x+6 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Lo studio del segno di $f''(x)$ e della convessità/concavità di f è come segue:



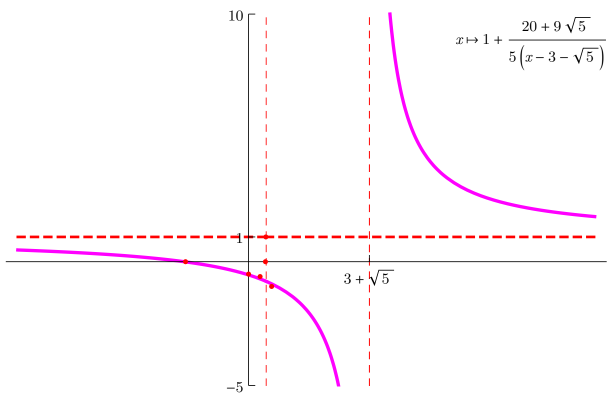
f. Il grafico di f ha l'aspetto seguente. Bisogna fare attenzione all'ordine delle ascisse $1/2 < -1+\sqrt{3} < 3/4 < 3-\sqrt{5} < 1$, che sono piuttosto vicine fra loro.



Complemento. Qualcuno potrebbe osservare che i due asintoti verticali sono avvicinati dalla funzione in modo diverso: quello a sinistra $x = 3-\sqrt{5}$ è avvolto strettamente, mentre quello a destra $x = 3+\sqrt{5}$ è tenuto più alla larga. Questo si può spiegare così: scomponendo in fattori il denominatore e poi decomponendo in somma di fratti semplici (come si fa quando si vuole l'integrale indefinito) viene questo conto:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2-6x+4} &= \frac{x^2+2x-2}{(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})} = \\ &= 1 + \frac{20-9\sqrt{5}}{5(x-3+\sqrt{5})} + \frac{20+9\sqrt{5}}{5(x-3-\sqrt{5})} \approx \\ &\approx 1 + \frac{8{,}02492}{x-3-\sqrt{5}} - \frac{0{,}0249224}{x-3+\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Si noterà che il fratto $1/(x-\sqrt{5}-3)$ è moltiplicato per un coefficiente 8,02 oltre 300 volte più grande del coefficiente dell'altro fratto $1/(x-3+\sqrt{5})$. Questo significa che lontano dal punto $3-\sqrt{5}$ il secondo fratto dà pochissimo contributo alla somma. Si confronti il grafico della f col grafico seguente, che è della funzione $x \mapsto 1 + (20-9\sqrt{5})/(5(x-3+\sqrt{5}))$:



3.a. Nella formula della funzione

$$g(x) = -x^2 + 2\arctan\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) + \frac{\pi}{2} + 2$$

l'unica operazione che ha restrizioni è la divisione (l'arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$). Quindi

$$\operatorname{dom} g = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

Una simmetria è evidente: giacché nella formula di $g(x)$ la x compare sempre al quadrato, la funzione è pari, cioè $f(x) = f(-x)$. Basterà quindi studiarla per $x \geq 0$.
Gli estremi del dominio sono $\pm 1, -\infty, +\infty$. I limiti agli estremi si calcolano così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\Big(-x^2 + 2\arctan\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) + \frac{\pi}{2} + 2\Big) = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \overbrace{x^2}^{\to+\infty}\Bigg(\overbrace{-1 + \frac{\pi}{x^2} + \frac{2}{x^2}}^{\to -1+0+0=-1} + \overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}\cdot \overbrace{\arctan\Big(\underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\to 0}\Big)}^{\to \arctan 0 = 0}\Bigg) = \\
&= +\infty(-1+0) = -\infty, \\
\lim_{x\to 1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-}\Big(\overbrace{-x^2 + \frac{\pi}{2} + 2}^{\to -1+\pi/2+2} + 2\arctan\frac{1}{\underbrace{1-x^2}_{\to 0^+}}\Big) = \\
&= 1 + \frac{\pi}{2} + 2\arctan(+\infty) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{3}{2}\pi, \\
\lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+}\Big(\overbrace{-x^2 + \frac{\pi}{2} + 2}^{\to -1+\pi/2+2} + 2\arctan\frac{1}{\underbrace{1-x^2}_{\to 0^-}}\Big) = \\
&= 1 + \frac{\pi}{2} + 2\arctan(-\infty) = 1 + \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\to -1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^+} g(x) = 1 - \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\to -1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1 + \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

I limiti da sinistra e da destra nei punto ± 1 sono finiti ma diversi. Quindi ci sono discontinuità di salto.

b. Non ci sono asintoti verticali, in quanto non ci sono punti al finito in cui la funzione tenda all'infinito. Vediamo se ce ne sono di obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\Bigg(\overbrace{-x + \frac{\pi}{2x} + \frac{2}{x}}^{\to\mp\infty} + \underbrace{\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}\cdot\overbrace{\arctan\Big(\underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\to 0}\Big)}^{\to\arctan 0 = 0}}_{\to 0\cdot 0 = 0}\Bigg) = \mp\infty.$$

Non ce ne sono.

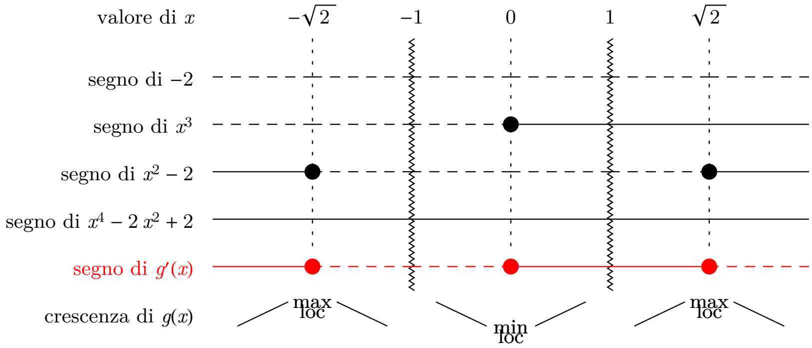
c. Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned}
g'(x) = D\Big(-x^2 + 2\arctan\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) + \frac{\pi}{2} + 2\Big) &= -2x + 2\frac{1}{1+\big(\frac{1}{1-x^2}\big)^2}\cdot D\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) = \\
&= -2x + 2\frac{1}{1+\big(\frac{1}{1-x^2}\big)^2}\cdot(-1)(1-x^2)^{-2}(-2x) = \\
&= -2x + 2\frac{1}{1+\big(\frac{1}{1-x^2}\big)^2}\cdot\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \\
&= -2x + \frac{4x}{(1-x^2)^2 + \big(\frac{1}{1-x^2}\big)^2(1-x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ora c'è una sottigliezza: la semplificazione $(\frac{1}{1-x^2})^2(1-x^2)^2 = 1$, che viene spontanea, strettamente parlando è valida solo quando $1-x^2 \neq 0$, mentre per $x = \pm 1$ l'uguaglianza $(\frac{1}{1-x^2})^2(1-x^2)^2 = 1$ ha il membro sinistro che non ha senso e il destro ha senso. Quindi la semplificazione è corretta soltanto per $x \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned} g'(x) = &-2x + \frac{4x}{(1-x^2)^2 + \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2(1-x^2)^2} = -2x + \frac{4x}{(1-x^2)^2+1} = \\ = &-2x + \frac{4x}{x^4-2x^2+1+1} = -2x + \frac{4x}{x^4-2x^2+2} = \\ = &\,2x\frac{-(x^4-2x^2+2)+2}{x^4-2x^2+2} = 2x\frac{-x^4+2x^2}{x^4-2x^2+2} = \frac{-2x^3(x^2-2)}{x^4-2x^2+2}. \end{aligned}$$

Il caso $x = -1$ va trattato a parte: in quel punto la funzione non esiste, quindi non ci si pone nemmeno il problema se è derivabile. La formula finale che abbiamo trovato per $g'(x)$ ha tuttavia senso anche per $x = -1$: questo fatto poco comune può indurre in errore. Vedremo più tardi un'interpretazione. Lo studio del segno della derivata è nello schema seguente:



Il denominatore $x^4 - 2x^2 + 2$ è sempre > 0, perché si può scrivere come $(1-x^2)^2 + 1$, cioè come un quadrato più 1. La g è strettamente crescente separatamente sui due intervalli $]0, 1[$ e $]1, \sqrt{2}]$, separati dal punto di non esistenza 1. Ci domandiamo se è strettamente crescente anche sull'unione dei due intervalli. La risposta è no, perché il limite per $x \to 1^-$ è $1 + 3\pi/2$, che è maggiore del limite per $x \to 1^+$, che è $1 - \pi/2$. In termini visivi, il tratto di grafico subito a sinistra di 1 è tutto a quota più alta del tratto subito a destra di 1, e quindi la funzione non può essere crescente attorno a 1.

d. Calcoliamo la derivata seconda per $x \neq -1$. Il conto è leggermente più semplice usando la formula prima di aver raccolto il denominatore comune:

$$\begin{aligned} g''(x) = D\Big(\frac{-2x^3(x^2-2)}{x^4-2x^2+2}\Big) = D\Big(-2x + 4\frac{x}{x^4-2x^2+2}\Big) &= -2 - 4\frac{x^4-2x^2+2-x(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2} = \\ = -2 + 4\frac{x^4-2x^2+2-4x^4+4x^2}{(x^4-2x^2+2)^2} &= -2 + 4\frac{-3x^4+2x^2+2}{(x^4-2x^2+2)^2} = \\ = 2\frac{-(x^4-2x^2+2)^2 + 2(-3x^4+2x^2+2)}{(x^4-2x^2+2)^2} &= 2\frac{-x^8+4x^6-8x^4+8x^2-4-6x^4+4x^2+4)}{(x^4-2x^2+2)^2} = \\ = 2\frac{-x^8+4x^6-14x^4+12x^2}{(x^4-2x^2+2)^2} &= -\frac{2x^2(x^6-4x^4+14x^2-12)}{(x^4-2x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Il polinomio di sesto grado $x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12$ non sembra scomponibile per via elementare.

e. Per $x = \pm\sqrt{2}$ la funzione vale zero:

$$\begin{aligned} g(\pm\sqrt{2}) = &-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 + 2\arctan\Big(\frac{1}{1-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2}\Big) + \frac{\pi}{2} + 2 = -2 + 2\arctan\Big(\frac{1}{1-2}\Big) + \frac{\pi}{2} + 2 = \\ = &\,2\arctan(-1) + \frac{\pi}{2} = 2\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

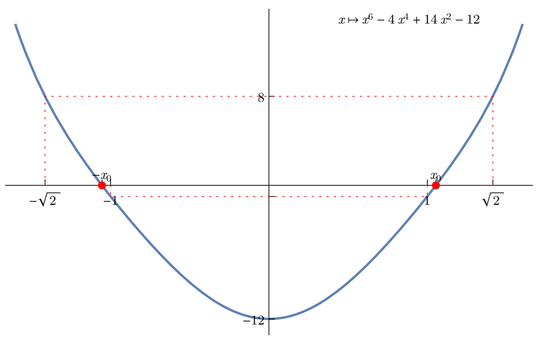
Dobbiamo stabilire se g si annulla in altri punti, e per questo ci aiutiamo con la monotonia. Su $[0, 1[$ la g è crescente. Dato che

$$g(0) = -0^2 + 2\arctan 1 + \frac{\pi}{2} + 2 = 2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2 = 2 + \pi > 0,$$

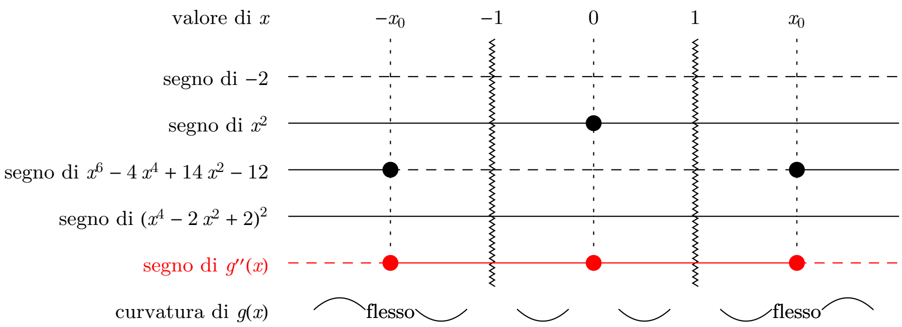
per la crescenza $0 \le x < 1 \Rightarrow 0 < g(0) \le g(x)$. Quindi non ci sono punti x fra 0 e 1 in cui $g(x) = 0$. Su $]1, \sqrt{2}]$ la g è strettamente crescente, e quindi il valore $g(x)$ può annullarsi al più in un solo punto, che è per forza $\sqrt{2}$. Analogamente su $[\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ la g è strettamente decrescente, e quindi il valore $g(x)$ può annullarsi al più in un solo punto, che è per forza $\sqrt{2}$. Quindi non ci sono altri punti $x > 1$ in cui $g(x) = 0$. Per la simmetria della funzione, $-\sqrt{2}$ è l'unico zero della funzione per $x \le 0$.

Passando alla derivata seconda, questa di sicuro si annulla in $x = 0$, ma questo non può essere un punto di flesso, perché è di minimo locale. Studiamo il fattore di sesto grado $x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12$ al numeratore. Questo per $x = 0$ vale -12 e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, per cui deve avere almeno una radice positiva e una negativa (simmetriche). Per stabilire se sono uniche vediamo la derivata $D(x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12) = 6x^5 - 16x^3 + 28x = 2x(3x^4 - 8x^2 + 14)$. Il fattore $3x^4 - 8x^2 + 14$ è biquadratico: ponendo $t = x^2$ viene $3t^2 - 8t + 14$, che primo coefficiente > 0 e ha discriminante (ridotto) $\Delta = 4^2 - 3 \cdot 14 = -26 < 0$. Quindi $3x^4 - 8x^2 + 14 > 0$ sempre, e $D(x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12)$ ha lo stesso segno di x. Ne segue che $x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12$ è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$, e può annullarsi in (al più) un punto che chiamiamo $x_0 > 0$ e in un punto $x_1 < 0$ (necessariamente $x_1 = -x_0$). Cerchiamo di localizzare tale radice rispetto agli altri punti notevoli della funzione:

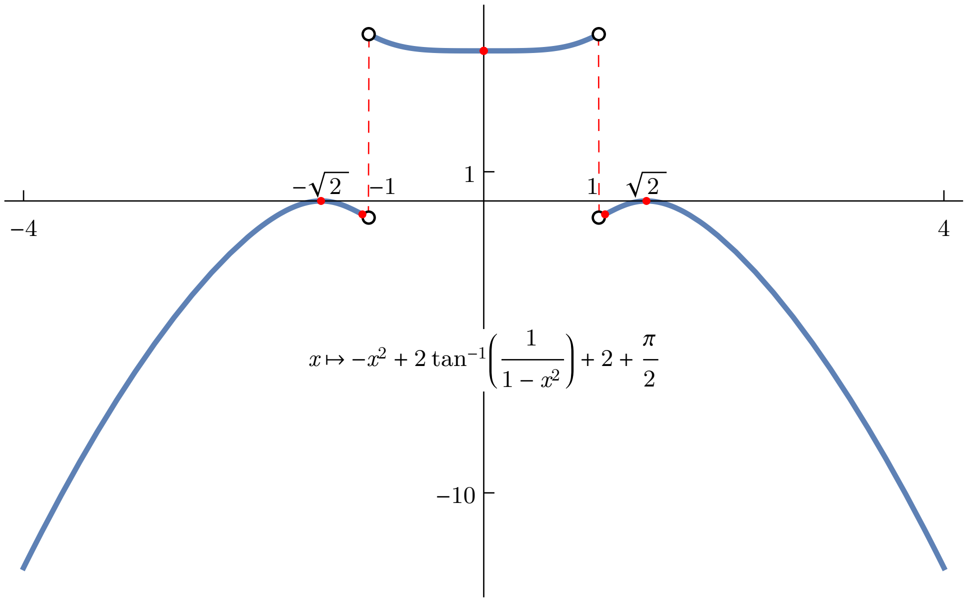
x	$x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12$
0	-12
1	-1
$\sqrt{2}$	8

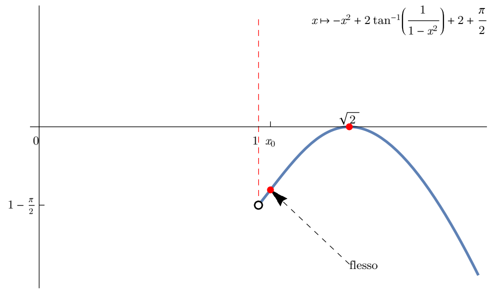


Il punto x_0 è quindi compreso fra 1 e $\sqrt{2}$, e in particolare è nel dominio di g. Nel punto x_0 il fattore $x^6 - 4x^4 + 14x^2 - 12$, essendo crescente, passa dal segno $-$ al segno $+$. Lo studio del segno di $g''(x)$ è nello schema seguente:



f. Un grafico di g, con un ingrandimento della zona attorno all'intervallo $[0, 1]$, sono nelle figure seguenti:





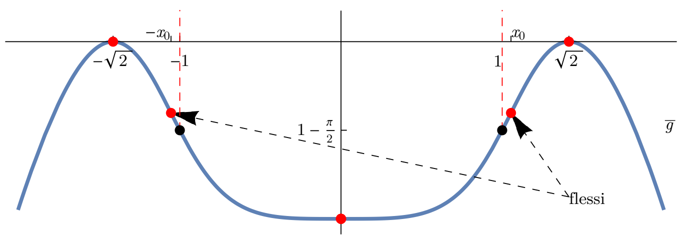
Complemento. Il grafico della funzione g è fatto di tre pezzi: quello per $x < -1$, quello per $-1 < x < 1$ e quello per $x > 1$. Immaginiamo di traslare verticalmente il pezzo di mezzo in modo che le estremità vadano a combaciare con le estremità degli altri due pezzi. In altre parole, definiamo la nuova funzione

$$\bar{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x < -1 \vee x > 1, \\ g(x) - \pi & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1 - \pi/2 & \text{se } x = \pm 1, \end{cases}$$

le discontinuità di salto scompaiono, e otteniamo un grafico tutto d'un pezzo ($\bar{g}$ è continua), la cui derivata è data dalla formula

$$\bar{g}'(x) = \frac{-2x^3(x^2-2)}{x^4 - 2x^2 + 2}$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, compresi $x = \pm 1$. La figura qui di séguito mostra il grafico di $\bar{g}$.



4. Le funzioni $(5/2)^x$, e^{x^2}, $x^2 \log x$ tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$. La funzione $e^{1/x}$ tende a $e^0 = 1$ per $x \to +\infty$. Le funzioni $(\log x)/x$ e $\log(\frac{x+1}{x})$ tendono a 0. La funzione rimanente $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^3}$ è della forma indeterminata $1^{+\infty}$, che però si riporta al limite fondamentale usando le regole di base delle potenze:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^3} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot x^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{x^2}.$$

Scritta nell'ultima maniera diventa determinata $e^{+\infty} = +\infty$.
Confrontiamo le due funzioni che tendono a 0:

$$\frac{\log(\frac{x+1}{x})}{(\log x)/x} = \frac{x\log(1+\frac{1}{x})}{\log x} = \frac{\log(1+\frac{1}{x})^x}{\log x} \longrightarrow \frac{\log e}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Quindi $\log(\frac{x+1}{x}) = o((\log x)/x)$.
Passiamo a confrontare gli infiniti. Quello $x^2 \log x$ è un polinomio moltiplicato per un logaritmo, quindi è più piccolo dell'esponenziale crescente $(5/2)^x$:

$$\frac{x^2\log x}{(5/2)^x} = \frac{x^3}{(5/2)^x}\cdot\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0\cdot 0 = 0,$$

grazie ai limiti noti polinomio/esponenziale e logaritmo/polinomio. Quindi $x^2\log x = o((5/2)^x)$. Confrontiamo $(5/2)^x$ con e^{x^2}:

$$\frac{(5/2)^x}{e^{x^2}} = \frac{e^{x\log(5/2)}}{e^{x^2}} = e^{x\log(5/2)-x^2} = e^{x(\log(5/2)-x)} \longrightarrow e^{+\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

Quindi $(5/2)^x = o(e^{x^2})$. Rimane da situare la funzione più complicata $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}$. La forma in cui l'abbiamo scritta più sopra fa sospettare che sia parente di e^{x^2}, e quindi confrontiamola con questa:

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}} &= \frac{\exp x^2}{\exp\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}} = \exp\left(x^2 - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}\right) = \\ &= \exp\left(x^2 - x^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\frac{\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}}\end{aligned}$$

Dentro all'ultimo esponenziale c'è una forma indeterminata 0/0 che si presta alla regola dell'Hôpital, perché prendendo la derivata scompare il logaritmo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}} &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-3\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x+1)}}{-3\frac{1}{x^4}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x-1+x}{x^2(x+1)}}{-3\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{-1}{x^2(x+1)}\cdot\frac{x^4}{3} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3(x+1)} = +\infty.\end{aligned}$$

Quindi, tornando all'esponenziale,

$$\frac{e^{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}} = \exp\frac{\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}} \longrightarrow \exp(+\infty) = +\infty.$$

Concludiamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3} = o(e^{x^2})$. Attenzione: dalla formula

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3} = \Bigg(\overbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}^{\to e}\Bigg)^{x^2}$$

si è tentati di pensare che $(1+\frac{1}{x})^{x^3}$ abbia lo stesso ordine di infinito di e^{x^2}. Sbagliato.
Rimane da confrontare $(1+\frac{1}{x})^{x^3}$ con $(5/2)^x$. Si può procedere come sopra, oppure (sospettando che il più grande sia il primo) per esempio sfruttare il fatto che $(1+\frac{1}{x})^x \to e \approx 2{,}718 > 2{,}5 = 5/2$, e quindi $(1+\frac{1}{x})^x > 5/2$ per tutti gli x abbastanza grandi, per cui

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3} = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{x^2} > \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2},$$

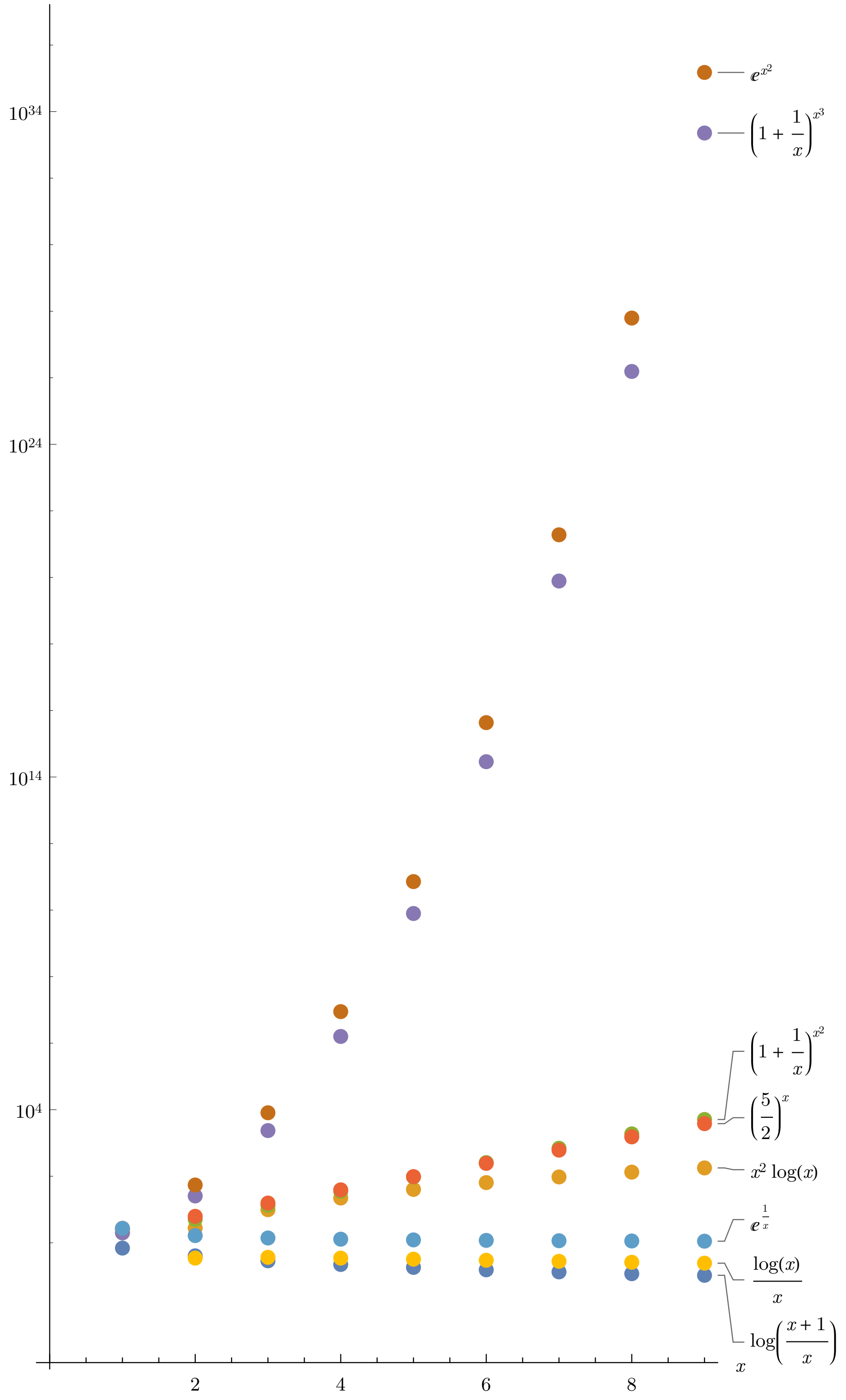
per cui, sempre per x grande,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}}{(5/2)^x} > \frac{(5/2)^{x^2}}{(5/2)^x)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-x} \longrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{+\infty} = +\infty,$$

da cui si conclude che $(5/2)^{x^2} = o((1+\frac{1}{x})^{x^3})$. Riassumendo, le funzioni messe in ordine in modo che quelle a sinistra siano o piccolo di quelle a destra sono

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right), \qquad \frac{\log x}{x}, \qquad e^{1/x}, \qquad x^2 \log x, \qquad (5/2)^x, \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^3}, \qquad e^{x^2}.$$

L'ordine risalta bene nel grafico in scala logaritmica:



5.a. La funzione razionale $(3x^3-2x^2+x)/(9x^2+6x+1)$ ha il numeratore di grado maggiore del denominatore. Facciamo la divisione di polinomi:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+3\,x^3 & -2\,x^2 & +x & & +9\,x^2 & +6\,x & +1 \\ \cline{5-7}
-3\,x^3 & -2\,x^2 & -\frac{x}{3} & & & +\frac{x}{3} & -\frac{4}{9} \\ \cline{1-4}
 & -4\,x^2 & +\frac{2\,x}{3} & & & & \\
 & +4\,x^2 & +\frac{8\,x}{3} & +\frac{4}{9} & & & \\ \cline{1-4}
 & & +\frac{10\,x}{3} & +\frac{4}{9} & & &
\end{array}
$$

Quindi abbiamo la decomposizione

$$\frac{3x^3-2x^2+x}{9x^2+6x+1}=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}+\frac{\frac{10}{3}x+\frac{4}{9}}{9x^2+6x+1}=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{15x+2}{9x^2+6x+1}.$$

Il denominatore ha discriminante $\Delta/4=3^2-9\cdot 1=0$, e infatti è un quadrato perfetto: $(3x+1)^2$. La funzione razionale che è rimasta

$$\frac{15x+2}{9x^2+6x+1}=\frac{15x+2}{(3x+1)^2}$$

si può decomporre in somma di fratti più semplici per esempio così:

$$\frac{15x+2}{(3x+1)^2}=\frac{5\cdot 3x+2}{(3x+1)^2}=\frac{5(3x+1-1)+2}{(3x+1)^2}=\frac{5(3x+1)-3}{(3x+1)^2}=\frac{5}{(3x+1)}+\frac{-3}{(3x+1)^2},$$

oppure in modo sistematico imponendo

$$\frac{15x+2}{(3x+1)^2}=\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{(3x+1)^2}=\frac{A(3x+1)+B}{(3x+1)^2}=\frac{(3A)x+(A+B)}{(3x+1)^2},$$

da cui, uguagliando i coefficienti dei numeratori al primo e all'ultimo membro,

$$\begin{cases}3A=15\\ A+B=2\end{cases}\iff\begin{cases}A=5\\ B=2-A=-3.\end{cases}$$

La decomposizione è complessivamente

$$\begin{aligned}\frac{3x^3-2x^2+x}{9x^2+6x+1}&=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\cdot\Big(\frac{5}{(3x+1)}-\frac{3}{(3x+1)^2}\Big)=\\ &=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}+\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{3x+1}-\frac{2}{3}\cdot(3x+1)^{-2}=\\ &=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}+\frac{10}{27}\cdot\frac{1}{3x+1}\cdot D(3x+1)-\frac{2}{9}\cdot(3x+1)^{-2}\cdot D(3x+1),\end{aligned}$$

che si integra con le regole di base:

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^3-2x^2+x}{9x^2+6x+1}dx&=\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x+\frac{10}{27}\log|3x+1|-\frac{2}{9}\cdot\frac{(3x+1)^{-2+1}}{-2+1}=\\ &=\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x+\frac{10}{27}\log|3x+1|+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3x+1}.\end{aligned}$$

b. La funzione

$$\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{arcsen}\,x}$$

può essere riportata alla differenza delle derivate di due funzioni composte:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{arcsen}\,x}=\\ &\qquad=\frac{1}{\arctan x}\cdot D(\arctan x)-2\frac{1}{\mathrm{arcsen}\,x}\cdot D(\mathrm{arcsen}\,x)=\\ &\qquad=\frac{g'(x)}{g(x)}-2\frac{h'(x)}{h(x)}=\\ &\qquad=D\big(\log|g(x)|\big)-D\big(2\log|h(x)|\big)=\\ &\qquad=D\big(\log|g(x)|-2\log|h(x)|\big)\end{aligned}$$

Quindi

$$\int\Big(\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x}\Big)dx=\log|\arctan x|-2\log|\operatorname{arcsen} x|=\log\Big|\frac{\arctan x}{\operatorname{arcsen}^2 x}\Big|.$$

c. Nella funzione

$$(1-x)\operatorname{sen}(2x-x^2)$$

il fattore $1-x$ assomiglia alla derivata dell'argomento del seno $2x-x^2$: per la precisione $D(2x-x^2)=2-2x=2(1-x)$. Quindi

$$\begin{aligned}\int(1-x)\operatorname{sen}(2x-x^2)dx&=\int\frac{1}{2}D(2x-x^2)\operatorname{sen}(2x-x^2)\,dx=\\&=\frac{1}{2}\int f'(x)\operatorname{sen} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\big(-\cos f(x)\big)=-\frac{1}{2}\cos(2x-x^2).\end{aligned}$$

d. Per calcolare una primitiva di $\log^2 x-\log x$ proviamo per parti due volte:

$$\begin{aligned}\int(\log^2 x-\log x)dx=\int D(x)(\log^2 x-\log x)dx&=x(\log^2 x-\log x)-\int x\cdot D(\log^2 x-\log x)dx=\\&=x(\log^2 x-\log x)-\int x\Big(2\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}\Big)dx=x(\log^2 x-\log x)-\int\Big(2\log x-1\Big)dx=\\&=x(\log^2 x-\log x)+x-2\int\log x\,dx=\\&=x(\log^2 x-\log x)+x-2\int D(x)\cdot\log x\,dx=\\&=x(\log^2 x-\log x)+x-2\Big(x\log x-\int x\cdot D(\log x)\,dx\Big)=\\&=x(\log^2 x-\log x)+x-2x\log x+2\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\\&=x(\log^2 x-\log x)+x-2x\log x+2\int 1\,dx=\\&=x(\log^2 x-\log x)+x-2x\log x+2x=\\&=x\log^2 x-x\log x+x-2x\log x+2x=\\&=x\log^2 x-3x\log x+3x.\end{aligned}$$

5. Nell'integrale

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$$

facciamo la sostituzione suggerita $x=-t^2/(2t+2)$. Il differenziale dx diventa

$$dx=D\Big(-\frac{t^2}{2t+2}\Big)dt=-\frac{2t(2t+2)-t^2\cdot 2}{(2t+2)^2}dt=-\frac{2t^2+4t}{(2t+2)^2}dt=-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}dt.$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx &= \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\sqrt{\left(-\frac{t^2}{2t+2}\right)^2-2\left(-\frac{t^2}{2t+2}\right)}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\sqrt{\frac{t^4}{(2t+2)^2}+\frac{2t^2}{2t+2}}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\sqrt{\frac{t^4+2t^2(2t+2)}{(2t+2)^2}}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\sqrt{\frac{t^4+4t^3+4t^2}{(2t+2)^2}}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dy = \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\sqrt{\frac{t^2(t^2+4t+4)}{(2t+2)^2}}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \int \frac{-t^2/(2t+2)}{\pm\frac{t(t+2)}{(2t+2)}}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \pm\int -\frac{t^2}{2t+2}\cdot\frac{2(t+1)}{t(t+2)}\cdot\Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \pm\int\frac{t^2}{2(t+1)^2}dt = \\
&= \pm\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2t+1-2t-1}{(t+1)^2}dt = \pm\frac{1}{2}\int\Big(1-\frac{2t+1}{(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \pm\frac{1}{2}\int\Big(1-\frac{2(t+1)-2+1}{(t+1)^2}\Big)dt = \pm\frac{1}{2}\int\Big(1-\frac{2}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \pm\frac{1}{2}\Big(t-2\log|t+1|+\frac{(t+1)^{-2+1}}{-2+1}\Big) = \\
&= \pm\frac{1}{2}\Big(t-2\log|t+1|-\frac{1}{t+1}\Big) = \pm\frac{1}{2}\Big(\frac{t^2+t-1}{t+1}-2\log|t+1|\Big).
\end{aligned}$$

Dobbiamo esprimere t in funzione di x:

$$x=-\frac{t^2}{2t+2} \iff (2t+2)x=-t^2 \iff t^2+2xt+2x=0 \iff t=-x\pm\sqrt{x^2-2x}.$$

Risostituendo:

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx &= \pm\frac{1}{2}\Big(\frac{t^2+t-1}{t+1}-2\log|t+1|\Big) = \pm\frac{1}{2}\Big(2\frac{t^2}{2(t+1)}+\frac{t+1-1-1}{t+1}-2\log|t+1|\Big) = \\
&= \pm\frac{1}{2}\Big(-2x+1-\frac{2}{t+1}-2\log|t+1|\Big) = \\
&= \pm\frac{1}{2}\Big(-2x+1-\frac{2}{-x\pm\sqrt{x^2-2x}+1}-2\log|-x\pm\sqrt{x^2-2x}+1|\Big).
\end{aligned}$$

Quali combinazioni di segni daranno un risultato corretto? Un modo per scoprirlo è di tentare tutte le 4 combinazioni di segni, derivando e confrontando con la funzione iniziale. Risulta che le due combinazioni corrette sono

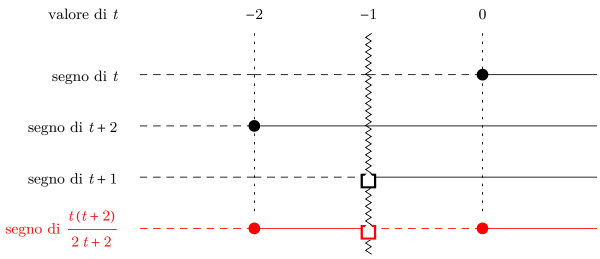
$$\frac{1}{2}\Big(-2x+1-\frac{2}{-x+\sqrt{x^2-2x}+1}-2\log\big|-x+\sqrt{x^2-2x}+1\big|\Big),$$
$$-\frac{1}{2}\Big(-2x+1-\frac{2}{-x-\sqrt{x^2-2x}+1}-2\log\big|-x-\sqrt{x^2-2x}+1\big|\Big).$$

Le altre due combinazioni non sono primitive della funzione data all'inizio, ma del suo opposto.
Un altro modo per decidere i segni era di stare attenti al dominio di x nella funzione iniziale, al dominio di t quando si fa il cambio di variabile $x=-t^2/(2t+2)$, e al segno di $t(t+2)/(2t+2)$ che esce dalla radice. Riguardo a quest'ultimo abbiamo

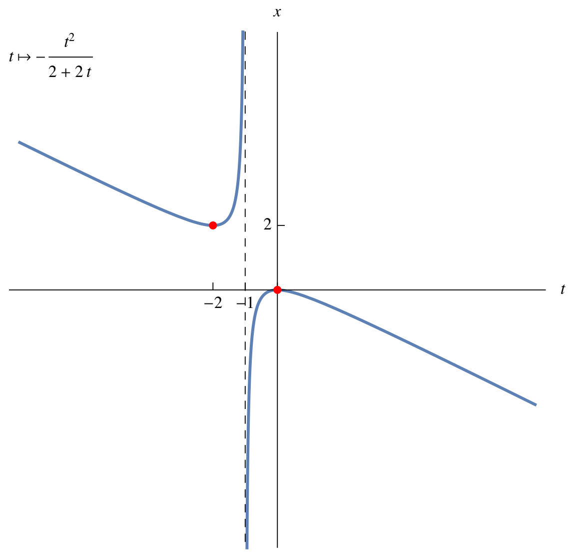
$$\frac{t(t+2)}{2t+2}\begin{cases} >0 & \text{se } -2<t<-1 \vee t>0, \\ <0 & \text{se } t<-2 \vee -1<t<0, \end{cases}$$

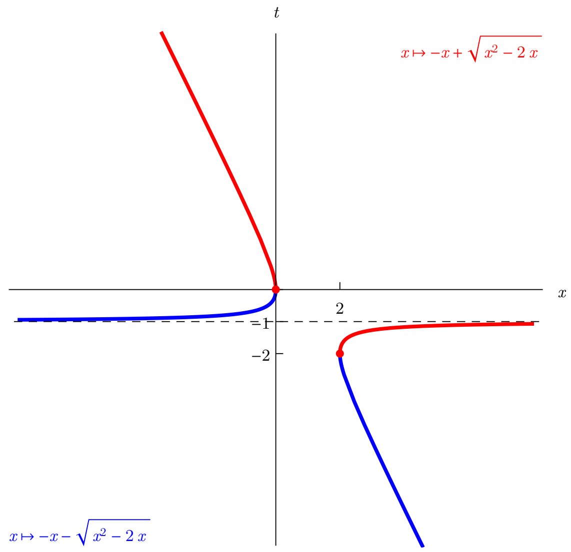
per cui

$$\sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}}=\begin{cases} +\dfrac{t(t+2)}{2t+2} & \text{se } -2<t<-1 \vee t>0, \\[2ex] -\dfrac{t(t+2)}{2t+2} & \text{se } t<-2 \vee -1<t<0, \end{cases}$$



La condizione di esistenza per la funzione iniziale è $x^2 - 2x > 0$, che restringe la x a $x < 0 \vee x > 2$. La funzione $t \mapsto -t^2/(2t+2)$ è invertibile (e quindi un buon cambio di variabile) in quattro tratti distinti.





Nel tratto $t < -2$ abbiamo

$$x > 2, \qquad x = -t - \sqrt{x^2 - 2x}, \qquad \sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}} = -\frac{t(t+2)}{2t+2}$$

Nel tratto $-2 < t < -1$ abbiamo

$$x > 2, \qquad x = -t + \sqrt{x^2 - 2x}, \qquad \sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}} = +\frac{t(t+2)}{2t+2}.$$

Nel tratto $-1 < t < 0$ abbiamo

$$x < 0, \qquad x = -t - \sqrt{x^2 - 2x}, \qquad \sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}} = -\frac{t(t+2)}{2t+2}.$$

Infine nel tratto $t > 0$ abbiamo

$$x < 0, \qquad x = -t + \sqrt{x^2 - 2x}, \qquad \sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}} = +\frac{t(t+2)}{2t+2}.$$

Troviamo di nuovo che le combinazioni corrette di segni sono $+$ con $+$, e $-$ con $-$.