Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino dell'11 febbraio 2014

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti, senza usare il teorema de L'Hôpital

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x+x^3)(2x^3+x^4-3)}{(x^2+2)(1-2x-x^2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^4+5x^3}-\sqrt{5x^4+x^2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e^x-(2+x)^{1/x}}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(2+x^x)}{x^2+1-\sqrt{x^4-x^3\log x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3-1)(2x^4+3x^2+x)-4x^7}{(x-1)^3(x^3-x^2+3)-x^4(x+1)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-1}-\sqrt{4e^{2x-2}-e^x+x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\log(e^x+2)}-\sqrt{2x-\sqrt{2x}}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+2x}\right)^x$

i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{e^x-\sqrt{1-x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-e^{2/x})}{x+\sqrt{x^2+x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^x-2}{(x^3-3x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x(x^2+x-4)(1-x)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right)^{x/2}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x^2-\sqrt{x^4-x^3}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a)}\ \frac{2x^2+5x+3}{5x+9}\ge\frac{x}{3},\qquad \text{(b)}\ 2\min\bigl\{-2x-1,|x+1|\bigr\}+x\ge0,\qquad \text{(c)}\ \sqrt{\frac{x-1}{4x^2-3}}\le\frac{1}{2}.$$

3. Sia a_n la successione definita per ricorrenza: $a_0=0$, $a_1=4$, $a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$. Dimostrare che $a_n=1-(-3)^n$ per ogni n. Dimostrare poi che $a_0+a_1+\cdots+a_n=(4n+3+(-3)^{n+1})/4$.

4. Poniamo $X=\bigl\{(1-|n|)/\bigl(4n-|n|+1\bigr)\ :\ n\in\mathbb{Z}\bigr\}$. Dimostrare che 1 è il massimo e $-1/3$ è l'estremo inferiore di X.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino dell'11 febbraio 2014

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti, senza usare il teorema de L'Hôpital

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\log(e^x-1)}-\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(3e^{x+1}-\sqrt{9e^{2x+2}-e^x+x}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^3+1)(x^4-x^2+3x)-3x^7}{(x+1)^3(x^3+2x^2-1)-x^4(x-1)^2}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{2x^4-x^3}-\sqrt{10x^4+x^2}\right)$

e) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+x^2)(x^3-x^5-5)}{(2x^2-1)(1-x^2+3x)}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-\log(1+x^x)}{x^2+1-\sqrt{x^4+2x^3\log x}}$

g) $\lim_{x\to-1}\dfrac{e^x-(1-x)^{2/x}}{(x^2-x-2)(x^2+4x+3)(x+1)}$

h) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^x-4}{(x^3-2x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{4x^2+1}\right)^x$

j) $\lim_{x\to-1}\dfrac{1-e^x\cdot e}{x(x^2+x-2)(x+1)}$

k) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x(e^{1/x}-1)}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

l) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x}\right)^{x/2}$

m) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{e^x-\sqrt{1+x}}$

n) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}\operatorname{sen}2x-\cos x}{x^2-\sqrt{x^4-2x^3}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a)}\ \frac{16x^2+8x+1}{3x+1}\geq 4x,\quad \text{(b)}\ 3\min\left\{4x-4,|x-2|\right\}\geq 2x,\quad \text{(c)}\ \sqrt{\frac{x+2}{7-4x^2}}\leq\frac{1}{2}.$$

3. Sia a_n la successione definita per ricorrenza: $a_0=-2$, $a_1=2$, $a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$. Dimostrare che $a_n=(-3)^{n+1}-1$ per ogni n. Dimostrare poi che $a_0+a_1+\cdots+a_n=((-3)^{n+1}-4n-5)/4$.

4. Poniamo $A=\left\{(1-|n|)/\left(4n-|n|+1\right)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che 1 è il massimo e $-1/3$ è l'estremo inferiore di A.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino dell'11 febbraio 2014

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti, senza usare il teorema de L'Hôpital

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{2x^4+x^3}-\sqrt{10x^4-x^2}\right)$

b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+x^2)(x^3+3x^5-2)}{(1-2x^2)(1+3x-x^2)}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-1}-\sqrt{4e^{2x-2}-x+e^x}\right)$

d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^3-1)(2x^4-3x^2+x)-4x^7}{(x-1)^3(x^3-x^2-2)-x^4(x-1)^2}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\log(e^x-1)}-\sqrt{2x+\sqrt{x}}\right)$

f) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-\log(2+x^x)}{x^2+1-\sqrt{x^4+x^3\log x}}$

g) $\lim_{x\to-1}\dfrac{(1-x)^{2/x}-e^x}{(x^2-x-2)(2x^2+3x+1)(x+1)}$

h) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-2\sqrt{x^2-x}\right)^{3x}$

i) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}\operatorname{sen}x-\cos 3x}{x^2-\sqrt{x^4+2x^3}}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x(1-e^{-1/x})}{x+\sqrt{x^2+x}}$

k) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\log(1+2x^2)}}{e^x-\sqrt{1+x}}$

l) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2-x+2}\right)^{x+2}$

m) $\lim_{x\to-1}\dfrac{1-e^x\cdot e}{x(x^2+x+2)(x+1)}$

n) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^x-3}{(2x^3-x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a) }\frac{2x^2-5x+3}{5x-9}\le\frac{x}{3},\quad\text{(b) }2\min\{2x-1,|1-x|\}\ge x,\quad\text{(c) }\sqrt{\frac{x+1}{3-4x^2}}\le\frac12$$

3. Sia a_n la successione definita per ricorrenza: $a_0=2$, $a_1=-2$, $a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$. Dimostrare che $a_n=1+(-3)^n$ per ogni n. Dimostrare poi che $a_0+a_1+\cdots+a_n=(4n+5-(-3)^{n+1})/4$.

4. Poniamo $E=\{(1-|n|)/(4n-|n|+1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. Dimostrare che 1 è il massimo e $-1/3$ è l'estremo inferiore di E.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino dell'11 febbraio 2014

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti, senza usare il teorema de L'Hôpital

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+x^3)(x^2+3x^4-x)}{(1-3x)(1-2x^3-x^2)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{e^x-(1+x)^{2/x}}{(x^2+x-2)(2x^2-3x+1)(x-1)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(3e^{x+1}-\sqrt{9e^{2x+2}+e^x-x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^3-1)(x^4-3x^2+x)-3x^7}{(x+1)^3(x^3+x^2-2)-x^4(x-1)^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x^4-3x^3}-\sqrt{5x^4+2x^2}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\log(e^x+1)}-\sqrt{2x+\sqrt{2x}}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\log(1+x^x)}{x^2+1-\sqrt{x^4-2x^3\log x}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3x}{x^2-x-2}\right)^{x-1}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}\operatorname{sen} x-3\cos x}{x^2-\sqrt{x^4+2x^3}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{e-e^x}{x(x^2+x+2)(x-1)}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x(e^{1/x}-1)}{x+\sqrt{x^2-2x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^x-4}{(2x^3-x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{e^x-\sqrt{1+4x}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)^{2x}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$\text{(a)}\ \frac{16x^2-8x+1}{3x-1}\le 4x,\quad \text{(b)}\ 3\min\bigl\{-4x-4,|x+2|\bigr\}+2x\ge0,\quad \text{(c)}\ \sqrt{\frac{2-x}{7-4x^2}}\le\frac{1}{2}.$$

3. Sia a_n la successione definita per ricorrenza: $a_0=4$, $a_1=0$, $a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$. Dimostrare che $a_n=3+(-3)^n$ per ogni n. Dimostrare poi che $a_0+a_1+\cdots+a_n=(12n+13-(-3)^{n+1})/4$.

4. Poniamo $Y=\bigl\{(1-|n|)/(4n-|n|+1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\bigr\}$. Dimostrare che 1 è il massimo e $-1/3$ è l'estremo inferiore di Y.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2013/2014

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino dell'11 febbraio 2014

Svolgimento

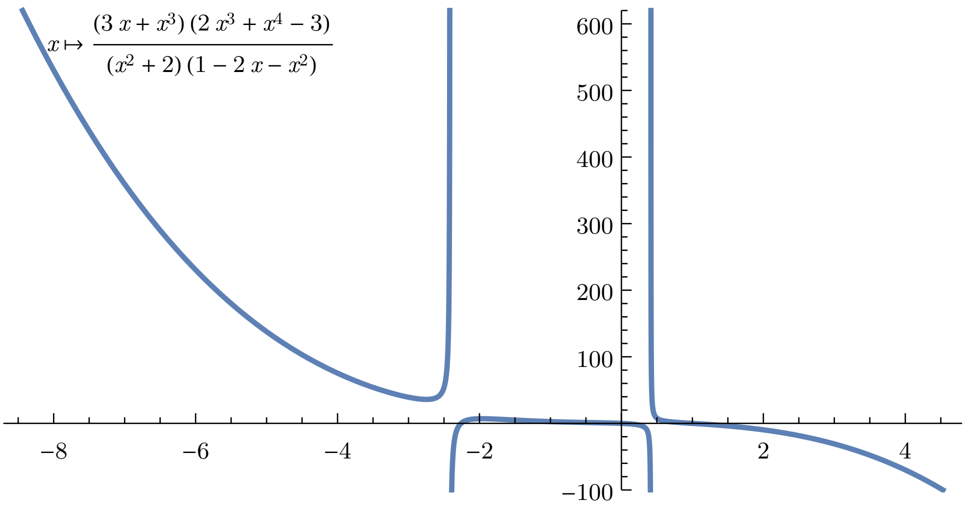
Le figure che seguono ogni calcolo di limite, nonché quelle che accompagnano i **complementi** servono ad allargare l'orizzonte per il lettore, e non sono minimamente richieste nello svolgimento del compito d'esame. Gli schemi usati nella soluzione delle disequazioni sono invece parte integrante dello svolgimento; sono consigliati ma non obbligatori.

1. a. Nel limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+x^3)(2x^3+x^4-3)}{(x^2+2)(1-2x-x^2)}$$

sia al numeratore che al denominatore abbiamo il prodotto di due polinomi. Raccogliamo da ognuno il termine principale (quello di grado più grande, dato che $x \to -\infty$) e raduniamo insieme i fattori che tendono a numeri finiti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+x^3)(2x^3+x^4-3)}{(x^2+2)(1-2x-x^2)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(3x^{-2}+1)\cdot x^4(2x^{-1}+1-3x^{-4})}{x^2(1+2x^{-2})\cdot x^2(x^{-2}-2x^{-1}-1)} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \overbrace{x^3}^{\to-\infty} \cdot \frac{\overbrace{(3x^{-2}+1)(2x^{-1}+1-3x^{-4})}^{\to 1}}{\underbrace{(1+2x^{-2})(x^{-2}-2x^{-1}-1)}_{\to -1}} = \\ &= (-\infty)\cdot\frac{1}{-1} = +\infty.\end{aligned}$$



b. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^4+5x^3}-\sqrt{5x^4+x^2}\right)$$

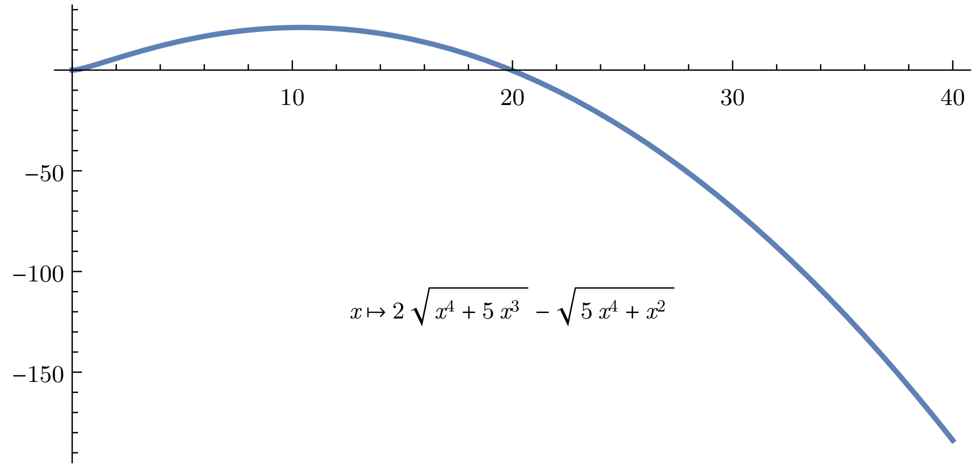
si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Per confrontare meglio i due infiniti, portiamo il fattore 2 dentro la radice:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^4+5x^3}-\sqrt{5x^4+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^4+4\cdot 5x^3}-\sqrt{5x^4+x^2}\right)$$

I due termini principali $4x^4$ e $5x^4$ non sono uguali. Quindi conviene raccoglierli e fattorizzarli:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^4+5x^3}-\sqrt{5x^4+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^4(1+5x^{-1})}-\sqrt{x^4(5+x^{-2})}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{x^2}^{\to+\infty}\overbrace{\left(2\sqrt{1+5x^{-1}}-\sqrt{5+x^{-2}}\right)}^{\to 2-\sqrt{5}<0}=-\infty.$$



c. Nel limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-(2+x)^{1/x}}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}$$

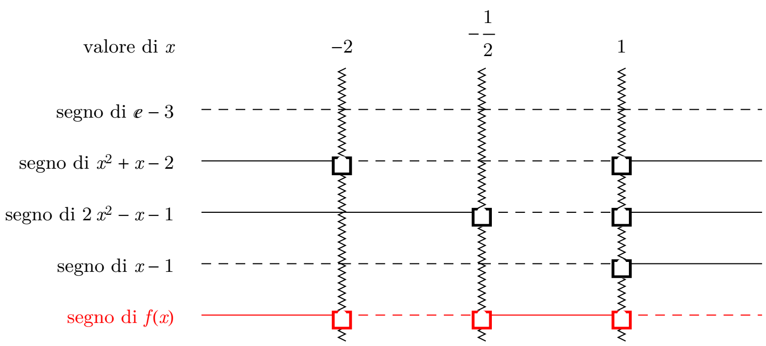
il numeratore tende a $e-3<0$, mentre tutti e tre i fattori al denominatore tendono a 0:

$$\lim_{x\to 1}\overbrace{\left(e^x-(2+x)^{1/x}\right)}^{\to e-3}\cdot\frac{1}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}=$$

$$=(e-3)\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e-3}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}$$

Quindi il limite è $\pm\infty$. Per essere più precisi bisogna studiare il segno del denominatore. Il fattore x^2+x-2 ha discriminante $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9$ e si annulla per $x\in\{(-1\pm 3)/2\}=\{-2,1\}$. Il fattore $2x^2-x-1$ ha discriminante $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9$ e si annulla per $x\in\{(1\pm 3)/4\}=\{1,-1/2\}$. Quindi lo studio del segno è



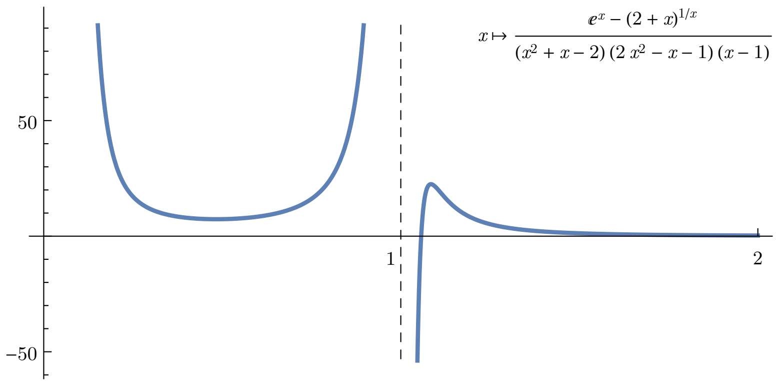
Il segno è positivo per $x\to 1^-$ e negativo per $x\to 1^+$. Quindi il limite iniziale non esiste, mentre esistono i due limiti unilaterali:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-(2+x)^{1/x}}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-(2+x)^{1/x}}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)}=-\infty.$$

Invece che studiare il segno del denominatore per tutti gli x anche lontani da 1, si poteva scomporre in fattori e poi separare i fattori a seconda che tendano a zero o no:

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{e-3}{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{e-3}{(x+2)(x-1)\cdot 2(x-1)\big(x-\frac{1}{2}\big)\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^\pm} \underbrace{\frac{e-3}{2(x+2)\big(x-\frac{1}{2}\big)}}_{\to 3} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-1)^3}}_{\to 0^\pm} = \frac{e-3}{3}\cdot(\pm\infty) = \mp\infty.$$



d. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\log(2+x^x)}{x^2+1-\sqrt{x^4-x^3\log x}}$$

sia il numeratore che il denominatore sono della forma indeterminata $+\infty-\infty$. Lavorando prima col numeratore, dentro il logaritmo mettiamo in evidenza il termine infinito x^x, usiamo le regola $\log ab = \log a + \log b$, $\log a^b = b\log a$, e infine mettiamo in evidenza l'infinito principale della somma:

$$x-\log(2+x^x) = x - \log x^x\Big(\frac{2}{x^x}+1\Big) = x - \log x^x - \log\Big(\frac{2}{x^x}+1\Big) = x - x\log x - \log\Big(\frac{2}{x^x}+1\Big) =$$

$$= -(x\log x)\underbrace{\Big(-\frac{1}{\log x}+1-\frac{1}{x\log x}\overbrace{\log\Big(\frac{2}{x^x}+1\Big)}^{\to 0}\Big)}_{\to 1}.$$

L'andamento del denominatore si chiarisce scrivendolo come differenza di due radici:

$$x^2+1-\sqrt{x^4-x^3\log x} = \sqrt{(x^2+1)^2} - \sqrt{x^4-x^3\log x} = \sqrt{x^4+2x^2+1} - \sqrt{x^4-x^3\log x},$$

da cui si vede che il termine principale x^4 è identico sotto le due radici. Conviene quindi moltiplicare e dividere per la somma delle radici, in modo che il termine x^4 si cancelli:

$$\frac{1}{x^2+1-\sqrt{x^4-x^3\log x}} = \frac{1}{(x^2+1)^2-(x^4-x^3\log x)}\cdot\big(x^2+1+\sqrt{x^4-x^3\log x}\big) =$$

$$= \frac{1}{x^4+2x^2+1-x^4+x^3\log x}\cdot\bigg(x^2+1+\sqrt{x^4\Big(1-\frac{\log x}{x}\Big)}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{2x^2+1+x^3\log x}\cdot x^2\bigg(1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{\log x}{x}}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{(x^3\log x)\big(2(x\log x)^{-1}+(x^3\log x)^{-1}+1\big)}\cdot x^2\bigg(1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{\log x}{x}}\bigg) =$$

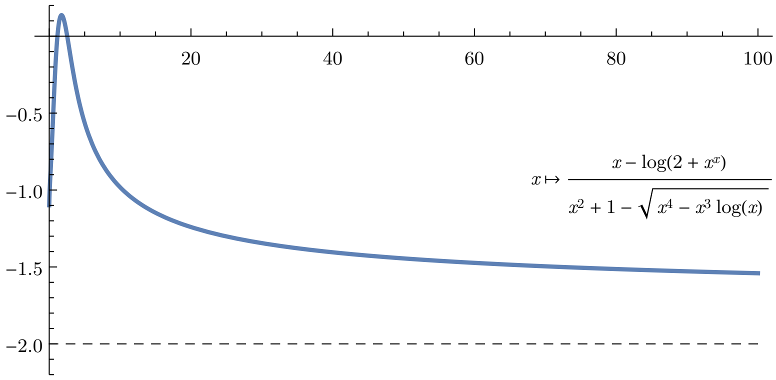
$$= \frac{x^2}{x^3\log x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{\log x}{x}}}{2(x\log x)^{-1}+(x^3\log x)^{-1}+1} =$$

$$= \frac{1}{x\log x}\cdot\frac{\overbrace{1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{\log x}{x}}}^{\to 2}}{\underbrace{2(x\log x)^{-1}+(x^3\log x)^{-1}+1}_{\to 1}}$$

Rimettendo insieme numeratore e denominatore, i termini principali $x\log x$ si cancellano:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(2+x^x)}{x^2+1-\sqrt{x^4-x^3\log x}} &= \lim_{x\to+\infty}\left(-(x\log x)\left(-\frac{1}{\log x}+1-\frac{1}{x\log x}\log\Big(\frac{2}{x^x}+1\Big)\right)\cdot\right.\\
&\qquad\left.\cdot\frac{1}{x\log x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{\log x}{x}}}{2(x\log x)^{-1}+(x^3\log x)^{-1}+1}\right)=\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(-\underbrace{\left(-\frac{1}{\log x}+1-\frac{1}{x\log x}\log\Big(\frac{2}{x^x}+1\Big)\right)}_{\to 1}\cdot\right.\\
&\qquad\left.\cdot\frac{\overbrace{1+\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{1-\dfrac{\log x}{x}}}^{\to 2}}{\underbrace{2(x\log x)^{-1}+(x^3\log x)^{-1}+1}_{\to 1}}\right)=\\
&= -2.
\end{aligned}
$$

Qualcuno forse sarebbe stato tentato di “trascurare” il termine $x^3\log x$ dentro la radice al denominatore, in quanto è piccolo rispetto a x^4. Il passaggio non è lecito, e produce un risultato sbagliato.



e. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3-1)(2x^4+3x^2+x)-4x^7}{(x-1)^3(x^3-x^2+3)-x^4(x+1)^2}$$

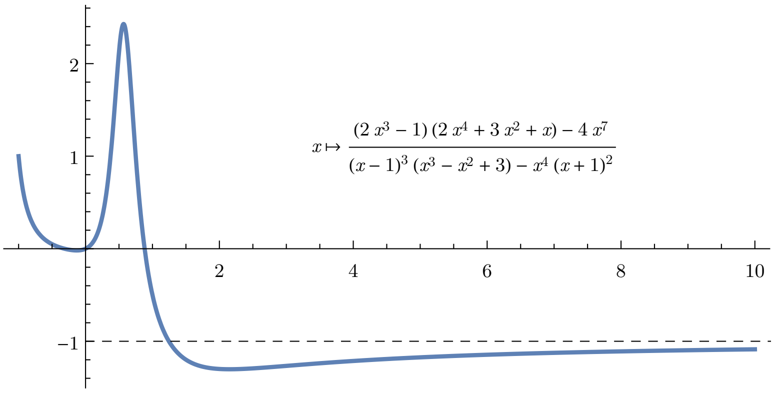
sia il numeratore che il denominatore sono della forma indeterminata $+\infty-\infty$. Proviamo a raccogliere i termini principali:

$$
\begin{aligned}
\frac{(2x^3-1)(2x^4+3x^2+x)-4x^7}{(x-1)^3(x^3-x^2+3)-x^4(x+1)^2} &= \frac{x^3(2-x^{-3})x^4(2+3x^{-2}+x^{-3})-4x^7}{x^3(1-x^{-1})^3x^3(1-x^{-1}+3x^{-3})-x^4x^2(1+x^{-1})^2}=\\
&= \frac{x^7}{x^6}\cdot\frac{(2-x^{-3})(2+3x^{-2}+x^{-3})-4}{(1-x^{-1})^3(1-x^{-1}+3x^{-3})-(1+x^{-1})^2}=\\
&= \underbrace{x}_{\to+\infty}\cdot\frac{\overbrace{(2-x^{-3})(2+3x^{-2}+x^{-3})-4}^{\to 4-4=0}}{\underbrace{(1-x^{-1})^3(1-x^{-1}+3x^{-3})-(1+x^{-1})^2}_{\to 1-1=0}}
\end{aligned}
$$

Scritto così la forma è indeterminata $\infty\cdot 0/0$. Cambiamo strada e sviluppiamo i prodotti a numeratore e denominatore:

$$
\begin{aligned}
\frac{(2x^3-1)(2x^4+3x^2+x)-4x^7}{(x-1)^3(x^3-x^2+3)-x^4(x+1)^2} &= \frac{(4x^7+6x^5+2x^4-2x^4-3x^2-x)-4x^7}{(x^3-3x^2+3x-1)(x^3-x^2+3)-x^4(x^2+2x+1)}=\\
&= \frac{6x^5-3x^2-x}{(x^6-x^5+3x^3-3x^5+3x^4-9x^2+3x^4-3x^3+9x-x^3+x^2-3)-x^6-2x^5-x^4}=\\
&= \frac{6x^5-3x^2-x}{-6x^5+5x^4-x^3-8x^2+9x-3}.
\end{aligned}
$$

Numeratore e denominatore hanno entrambi grado 5. Quindi il limite è il rapporto fra i coefficienti di grado massimo, cioè $6/(-6) = -1$.
Qualcuno forse sarebbe stato tentato di "trascurare" il termine $3x^2 + x$ nel fattore $(2x^4 + 3x^2 + x)$, o similmente di "trascurare" il termine $-x^2 + 3$ nel fattore $(x^3 - x^2 + 3)$. Il passaggio non è lecito, e porterebbe a un risultato sbagliato.



f. Il limite

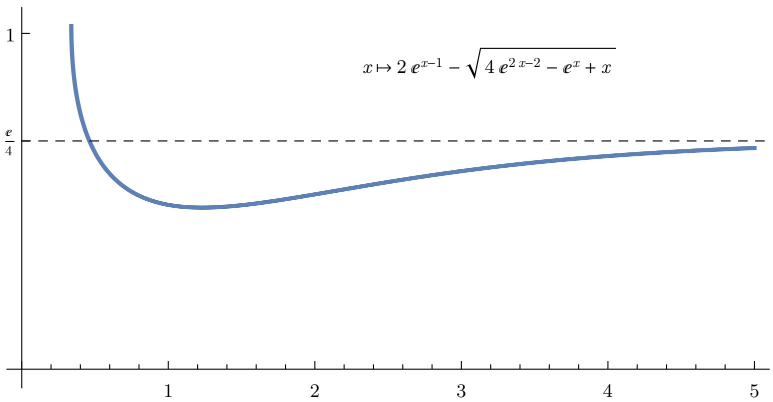
$$\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-1} - \sqrt{4e^{2x-2} - e^x + x}\right)$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ (anche dentro alla radice sarebbe $+\infty - \infty + \infty$, ma il primo prevale chiaramente). Mettendo il primo addendo sotto radice li confrontiamo meglio:

$$2e^{x-1} - \sqrt{4e^{2x-2} - e^x + x} = \sqrt{(2e^{x-1})^2} - \sqrt{4e^{2x-2} - e^x + x} = \sqrt{4e^{2x-2}} - \sqrt{4e^{2x-2} - e^x + x}.$$

I termini principali sotto radice sono identici. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici, in modo che i termini principali si elidano:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} 2e^{x-1} - \sqrt{4e^{2x-2} - e^x + x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2e^{x-1})^2 - (4e^{2x-2} - e^x + x)}{2e^{x-1} + \sqrt{4e^{2x-2} - e^x + x}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x-2} - 4e^{2x-2} + e^x - x}{2e^{x-1} + \sqrt{e^{2x-2}(4 - e^{x-(2x-2)} + xe^{-2x+2})}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{2e^{x-1} + e^{x-1}\sqrt{4 - e^{x-(2x-2)} + xe^{-2x+2}}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - xe^{-x}}{2e^{-1} + e^{-1}\sqrt{4 - e^{x-(2x-2)} + xe^{-2x+2}}} = \\
&= \frac{1-0}{2e^{-1} + e^{-1}\sqrt{4}} = \frac{1}{4e^{-1}} = \frac{e}{4}.
\end{aligned}$$



g. Il limite

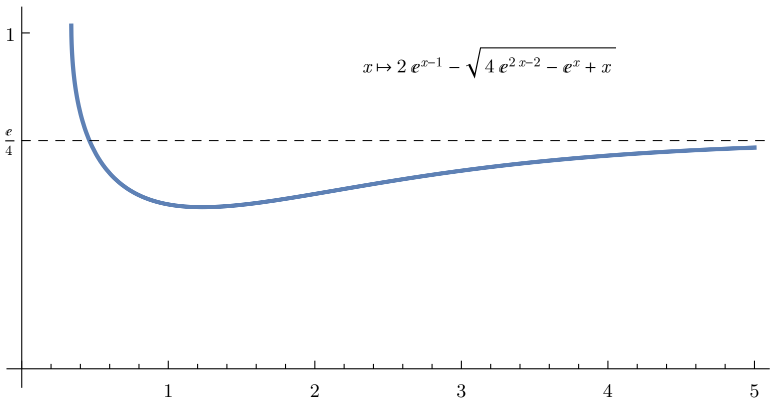
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x + \log(e^x + 2)} - \sqrt{2x - \sqrt{2x}}\right)$$

Si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Dentro il logaritmo mettiamo in evidenza il termine infinito e^x e usiamo le regola $\log ab = \log a + \log b$, $\log e^b = b$:

$$x + \log(e^x + 2) = x + \log\big(e^x(1 + 2e^{-x})\big) = x + \log e^x + \log(1 + 2e^{-x}) = x + x + \log(1 + 2e^{-x}) =$$
$$= 2x + \overbrace{\log(1 + 2e^{-x})}^{\to 0}$$

Quindi dentro le due radici il termine dominante è $2x$, identico in entrambe. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle due radici, in modo che il termine principale si cancelli:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{x + \log(e^x + 2)} - \sqrt{2x - \sqrt{2x}}\Big) &= \lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{2x + \log(1 + 2e^{-x})} - \sqrt{2x - \sqrt{2x}}\Big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log(1 + 2e^{-x}) - \big(2x - \sqrt{2x}\big)}{\sqrt{2x + \log(1 + 2e^{-x})} + \sqrt{2x - \sqrt{2x}}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log(1 + 2e^{-x}) - 2x + \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\Big(\sqrt{1 + \frac{\log(1+2e^{-x})}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}\Big)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1 + 2e^{-x}) + \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\Big(\sqrt{1 + \frac{\log(1+2e^{-x})}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}\Big)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log(1+2e^{-x})}{\sqrt{2x}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\log(1+2e^{-x})}{2x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}} = \\
&= \frac{0 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$



h. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\big(x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}\big)^x$$

abbiamo una potenza in cui sia la base che l'esponente dipendono da x e si presenta nella forma indeterminata $(+\infty - \infty)^\infty$. Per vedere cosa fa la base, scriviamola come differenza di radici:

$$x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(x + 2)^2} - \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x}.$$

I termini principali dentro radici sono x^2, lo stesso in entrambi. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici, in modo che i termini principali si elidano:

$$x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} = \frac{(x^2 + 4x + 4) - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{2x + 4}{x\big(\sqrt{1 + 4x^{-1} + 4x^{-2}} + \sqrt{1 + 2x^{-1}}\big)} =$$
$$= \frac{2 + 4x^{-1}}{\sqrt{1 + 4x^{-1} + 4x^{-2}} + \sqrt{1 + 2x^{-1}}} \longrightarrow \frac{2}{1 + 1} = 1.$$

Quindi il limite di partenza è della forma indeterminata 1^∞. Prendiamo il logaritmo e riportiamoci al limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t \to 0$ isolando un 1 dentro il logaritmo:

$$\begin{aligned}
\log \lim_{x\to+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+2x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(x+2-\sqrt{x^2+2x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\log\big(\overbrace{x+2-\sqrt{x^2+2x}}^{\to 1}\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\overbrace{(x+1-\sqrt{x^2+2x})}^{=t\to0}\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\big(\overbrace{x+1-\sqrt{x^2+2x}}^{=t\to0}\big)\frac{\log\big(1+\overbrace{(x+1-\sqrt{x^2+2x})}^{=t\to0}\big)}{\underbrace{x+1-\sqrt{x^2+2x}}_{=t\to0}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\big(x+1-\sqrt{x^2+2x}\big)\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\big(x+1-\sqrt{x^2+2x}\big).
\end{aligned}$$

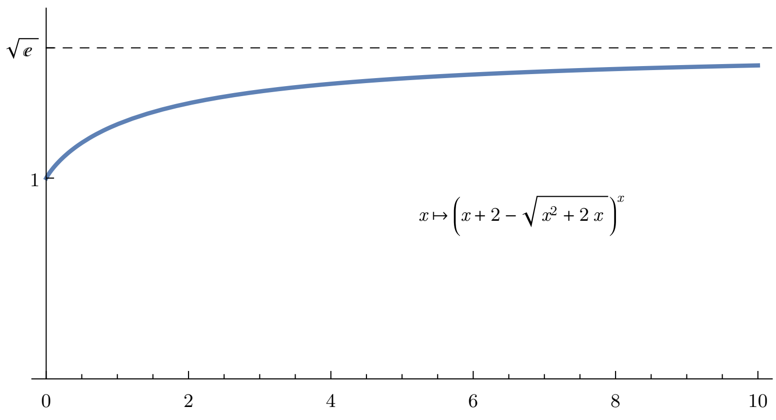
Ci siamo riportati a una forma indeterminata $\infty\cdot 0$, ma senza logaritmi o esponenziali. Come prima moltiplichiamo e dividiamo per la somma, in modo da far elidere il termine principale x^2:

$$\begin{aligned}
x\big(x+1-\sqrt{x^2+2x}\big) &= x\cdot\frac{(x+1)^2-(x^2+2x)}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} = x\cdot\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} = \\
&= x\cdot\frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x}{x+1+x\sqrt{1+2x^{-1}}} = \\
&= \frac{1}{1+x^{-1}+\sqrt{1+2x^{-1}}} \longrightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Tornando al limite iniziale,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+2x}\right)^x = \exp\lim_{x\to+\infty}\log\left(x+2-\sqrt{x^2+2x}\right)^x = \exp\frac{1}{2} = \sqrt{e}.$$

Si poteva anche usare la scorciatoia secondo la quale $\lim f(x)^{g(x)} = \exp\lim g(x)(f(x)-1)$, che vale quando $f(x)\to 1$.



i. Il limite

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{e^x-\sqrt{1-x}}$$

si presenta nella forma $0/0$. Al numeratore cerchiamo di riportarci al limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$, mentre al denominatore moltiplichiamo e dividiamo per la somma, per liberarci della radice:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{e^x-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}}{(e^x)^2-(1-x)}\cdot\left(e^x+\sqrt{1-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{(e^x)^2-(1-x)} \cdot \underbrace{\left(e^x+\sqrt{1-x}\right)\sqrt{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}}_{\to 2} =$$

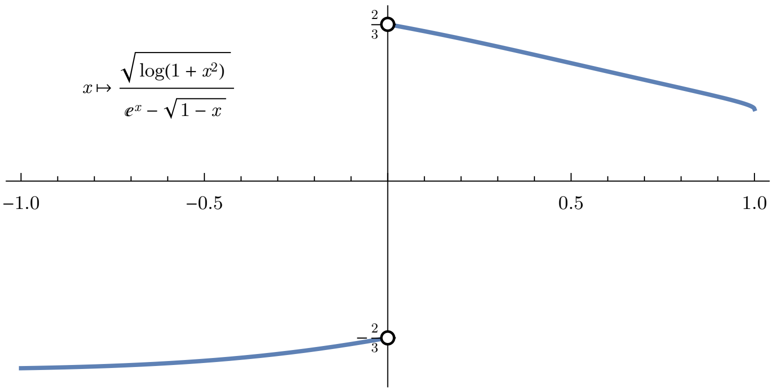
$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{e^{2x}-1+x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2x\frac{e^{2x}-1}{2x}+x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{\underbrace{2\frac{e^{2x}-1}{2x}+1}_{\to 3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Distinguiamo infine i limiti da destra e da sinistra:

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -\frac{2}{3}.$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Il limite di partenza non esiste.



j. Il limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-e^{2/x})}{x+\sqrt{x^2+x}}$$

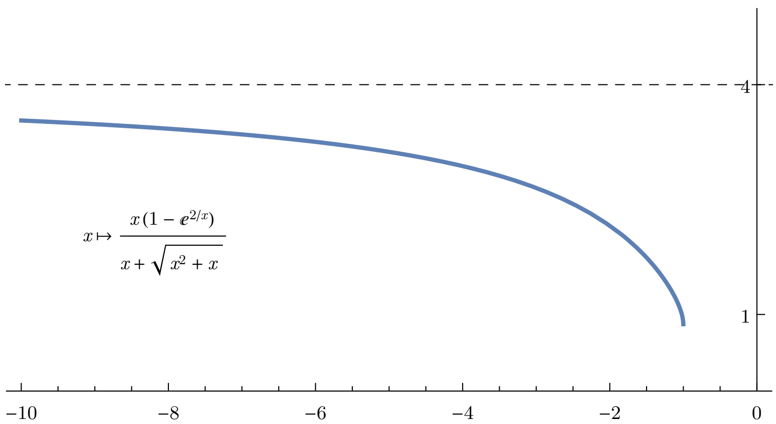
si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0/(-\infty+\infty)$. Cerchiamo di riportarci al limite notevole $(e^t-1)/t \to 1$, moltiplichiamo e dividiamo per la differenza e mettiamo in evidenza il termine principale al denominatore:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-e^{2/x})}{x+\sqrt{x^2+x}} = -\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2-(x^2+x)} \cdot (2/x) \cdot \underbrace{\frac{e^{2/x}-1}{2/x}}_{\to 1} \cdot \left(x-\sqrt{x^2+x}\right) =$$

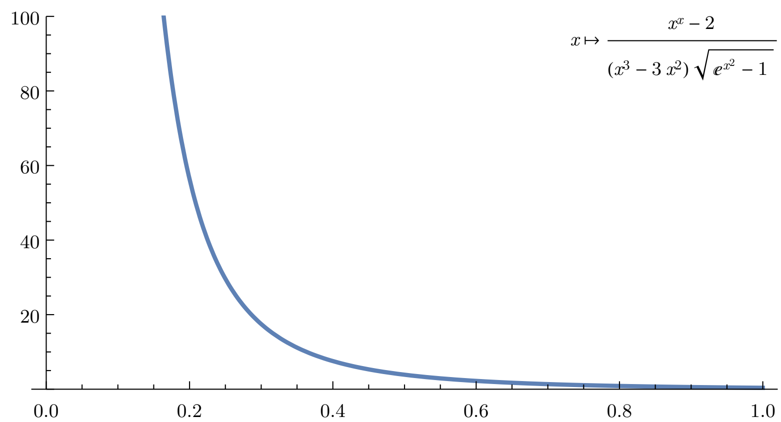
$$= -\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x} \cdot (2/x) \cdot \left(x-|x|\sqrt{1+x^{-1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} \cdot \left(x+x\sqrt{1+x^{-1}}\right) =$$

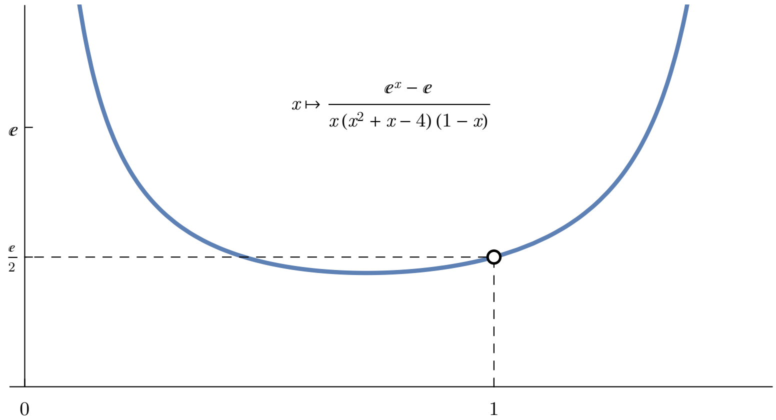
$$= \lim_{x\to -\infty} 2\left(1+\sqrt{1+x^{-1}}\right) = 2(1+1) = 4.$$



k. Il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^x-2}{(x^3-3x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}$$
contiene x^x, che è ben definito solo quando $x>0$, e che è forma indeterminata 0^0. La si può risolvere per esempio portando x all'esponente e usando il limite notevole $(\log t)/t\to 0$ per $t\to+\infty$:
$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+}(e^{\log x})x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\log x}=\exp\lim_{x\to 0}x\log x=\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/x}=$$
$$=\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{-\log(1/x)}{1/x}=\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{-\log(1/x)}{1/x}=\exp\lim_{t\to+\infty}\frac{-\log t}{t}=\exp 0=1.$$
Tornando al limite iniziale, cerchiamo di riportarci al limite notevole $(e^t-1)/t\to 1$ e portiamo a fattore i termini principali (quelli col grado più basso):
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^x-2}^{\to 1-2=-1}}{(x^3-3x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(x^3-3x^2)\sqrt{e^{x^2}-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x^2(x-3)\sqrt{x^2\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-1}{\underbrace{(x-3)\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}}_{\to -3}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2|x|}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{0^+}=+\infty.$$



l. Il limite
$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x(x^2+x-4)(1-x)}$$
si presenta nella forma indeterminata $0/0$. I primi due fattori al denominatore non tendono a 0, e si possono semplificare:
$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x(x^2+x-4)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{1-x}\cdot\frac{1}{\underbrace{x(x^2+x-4)}_{\to 1\cdot(1+1-4)=-2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{1-x}$$
Raccogliamo e al numeratore e riportiamoci al limite notevole $(e^t-1)/t\to 1$ col cambio di variabile $t=x-1$:
$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{1-x}=-\frac{e}{2}\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{1-x}=-\frac{e}{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{-t}=\frac{e}{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\frac{e}{2}.$$



m. Nel limite

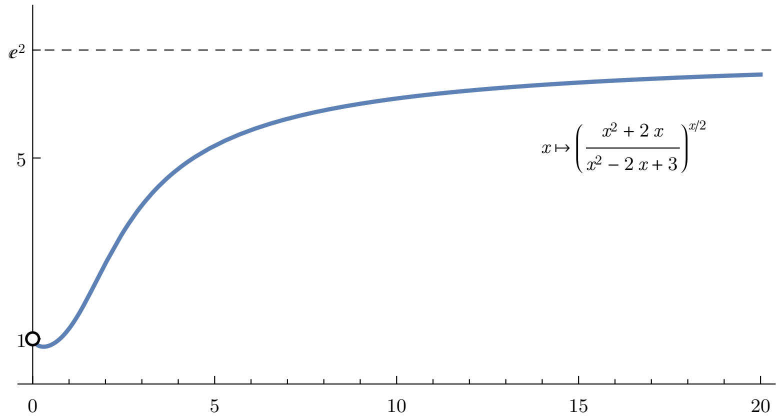
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right)^{x/2}$$

c'è una potenza in cui sia base che esponente dipendono da x, e si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Prendiamo il logaritmo e cerchiamo di riportarci al limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$:

$$\begin{aligned}
\log\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right)^{x/2} &= \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right)^{x/2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\log\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\log\left(1+\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\log\left(1+\frac{x^2+2x-(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\log\left(1+\frac{4x-3}{x^2-2x+3}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\cdot\frac{4x-3}{x^2-2x+3}\cdot\frac{\log\left(1+\frac{4x-3}{x^2-2x+3}\right)}{\frac{4x-3}{x^2-2x+3}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\cdot\frac{4x-3}{x^2-2x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\cdot\frac{4x^2-3x}{2(x^2-2x+3)} = \frac{4}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Tornando al limite iniziale,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right)^{x/2} = \exp\log\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-2x+3}\right)^{x/2} = \exp 2 = e^2.$$



n. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x - 2\cos x}{x^2-\sqrt{x^4-x^3}}$$

il numeratore ha un andamento oscillante, mentre il denominatore è della forma $+\infty-\infty$. Riscrivendo il denominatore come $\sqrt{x^4} = \sqrt{x^4-x^3}$ vediamo che il termine principale x^4 dentro le due radici è lo stesso, per cui conviene moltiplicare e dividere per la somma delle due radici, in modo da elidere il termine principale:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x^2-\sqrt{x^4-x^3}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x^4-(x^4-x^3)}\cdot\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3}\right)=\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x^3}\cdot\left(x^2+x^2\sqrt{1-x^{-1}}\right)=\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x}\cdot\underbrace{\left(1+1\sqrt{1-x^{-1}}\right)}_{\to 2}=\\ &= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x}\end{aligned}$$

Ci siamo riportati a una frazione in cui il numeratore è oscillante e il denominatore tende a $+\infty$. Vediamo se il numeratore è limitato:

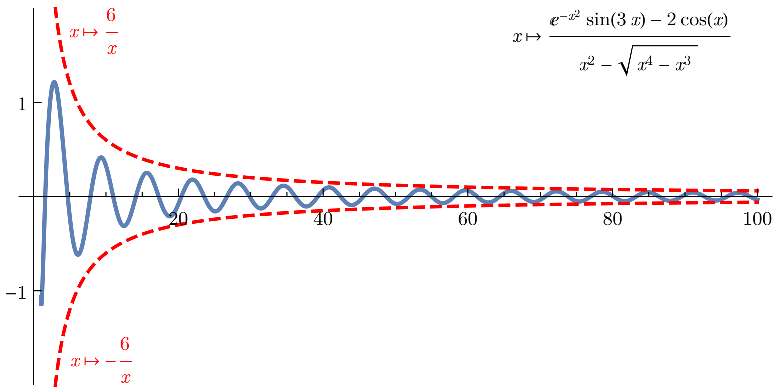
$$\left|e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x\right| \le \underbrace{e^{-x^2}}_{\le e^0=1}\underbrace{|\operatorname{sen}3x|}_{\le 1}+2\underbrace{|\cos x|}_{\le 1} \le 1\cdot 1+2\cdot 1=3.$$

Quindi vale la disuguaglianza

$$-\frac{3}{|x|}\le\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x}\le\frac{3}{|x|},$$

nella quale il primo e l'ultimo membro tendono entrambi a 0. Per il teorema del confronto concludiamo che anche il membro centrale tende a 0:

$$2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}\operatorname{sen}3x-2\cos x}{x}=1\cdot 0=0.$$



2. a. Per risolvere la disequazione

$$\frac{2x^2+5x+3}{5x+9}\ge\frac{x}{3}$$

ci riportiamo alla regola dei segni portando tutto al primo membro

$$\frac{2x^2+5x+3}{5x+9}\ge\frac{x}{3}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{2x^2+5x+3}{5x+9}-\frac{x}{3}\ge 0,$$

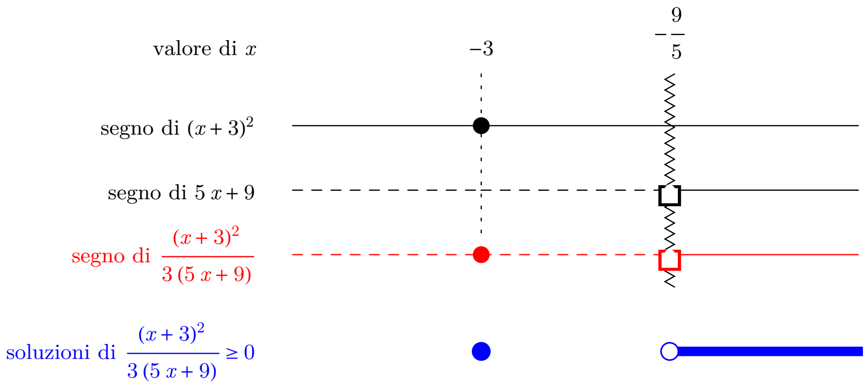
e facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned}0\le\frac{2x^2+5x+3}{5x+9}-\frac{x}{3}&=\frac{3(2x^2+5x+3)-x(5x+9)}{3(5x+9)}=\frac{6x^2+15x+9-5x^2-9x}{3(5x+9)}=\\&=\frac{x^2+6x+9}{3(5x+9)}.\end{aligned}$$

Troviamo dove si annulla il numeratore. Il discriminante ridotto è $\Delta/4=3^2-9\cdot 1=9-9=0$ e c'è la radice doppia -3. Ora che ci facciamo caso, il numeratore è un quadrato perfetto:

$$\frac{x^2+6x+9}{3(5x+9)}=\frac{(x+3)^2}{3(5x+9)}.$$

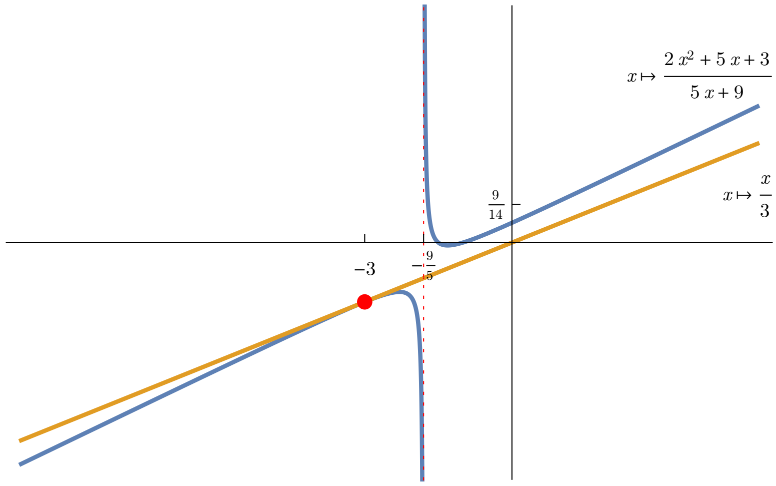
Lo studio del segno e la soluzione della disequazione sono nello schema seguente:



Si intende che i tratti orizzontali (neri o rossi) continui significano segno $+$, quelli tratteggiati il segno $-$, i pallini neri significano il segno 0 al numeratore, i quadratini bucati un segno 0 al denominatore, la linea a zigzag verticale segnala punti dove non esiste l'espressione (tipicamente uno zero del denominatore). Le linee continue blu e i pallini pieni blu vogliono dire invece soluzioni della disequazione, mentre i pallini vuoti vogliono dire non soluzione.
Concludendo,

$$\frac{2x^2+5x+3}{5x+9} \geq \frac{x}{3} \qquad \iff \qquad x=-3 \vee x>-9/5.$$

Complemento. Per chi non si capacitasse della soluzione isolata $x=-3$, la figura seguente può essere illuminante: il grafico della funzione $x \mapsto (2x^2+5x+3)/(5x+9)$ è tangente alla retta $y=x/3$ proprio nel punto di ascissa -3, mentre nei punti attorno sta sotto.



b. La disequazione

$$2\min\bigl\{-2x-1, |x+1|\bigr\}+x \geq 0$$

si può ricondurre all'unione di sistemi che non contengono valori assoluti o min:

$$2\min\bigl\{-2x-1, |x+1|\bigr\}+x \geq 0 \qquad \iff$$

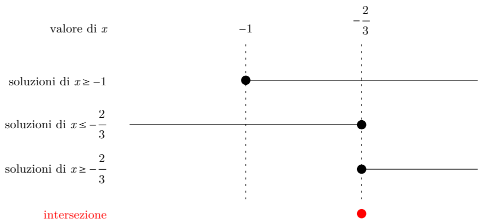
$$\iff \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2\min\bigl\{-2x-1, x+1\bigr\}+x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1<0 \\ 2\min\bigl\{-2x-1, -(x+1)\bigr\}+x \geq 0 \end{cases} \quad \iff$$

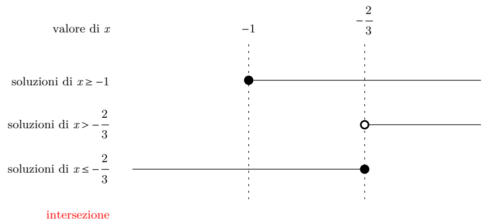
$$\iff \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ -2x-1 \geq x+1 \\ 2(x+1)+x \geq 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ -2x-1 < x+1 \\ 2(-2x-1)+x \geq 0 \end{cases} \vee$$

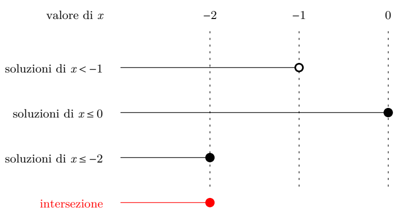
$$\vee \quad \begin{cases} x+1<0 \\ -2x-1 \geq -(x+1) \\ 2\bigl(-(x+1)\bigr)+x \geq 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x+1<0 \\ -2x-1 < -(x+1) \\ 2(-2x-1)+x \geq 0 \end{cases} \quad \iff$$

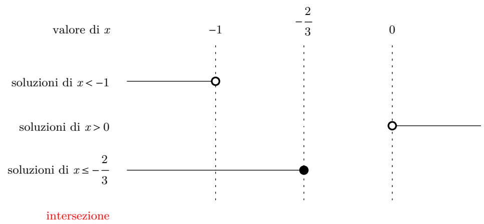
$$\iff \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ -3x \geq 2 \\ 3x \geq -2 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ -3x < 2 \\ -3x \geq 2 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ -x \geq 0 \\ -x \geq 2 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ -x < 0 \\ -3x \geq 2 \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2/3 \\ x \geq -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -2/3 \\ x \leq -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x \leq 0 \\ x \leq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \\ x \leq -2/3 \end{cases} \iff$$

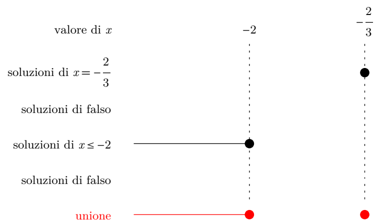






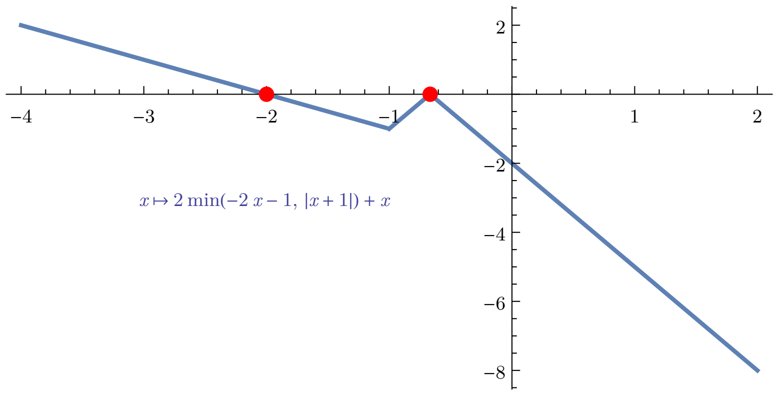


$$\iff \quad x = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad \text{falso} \quad \vee \quad x \leq -2 \quad \vee \quad \text{falso} \quad \iff$$



$$\iff \quad x = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x \leq -2\,.$$

Complemento. Un grafico della funzione $x \mapsto |1 + \min\{1-2x, x+1\}| + x - 2$ può far capire la soluzione isolata $x = 0$: in quel punto la funzione vale 0, mentre nei punti attorno è negativa (il grafico è angoloso).



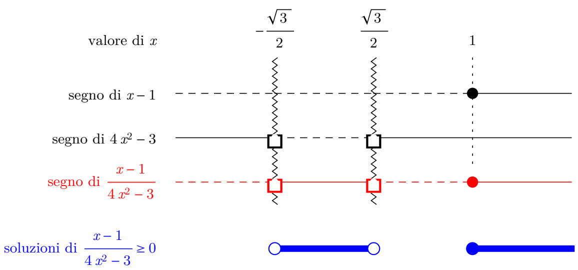
c. La disequazione

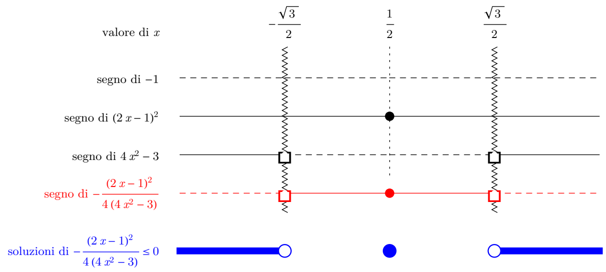
$$\sqrt{\frac{x-1}{4x^2-3}} \leq \frac{1}{2}$$

si presenta nella forma $\sqrt{A} \leq B$, che equivale a un sistema che non contiene radicali:

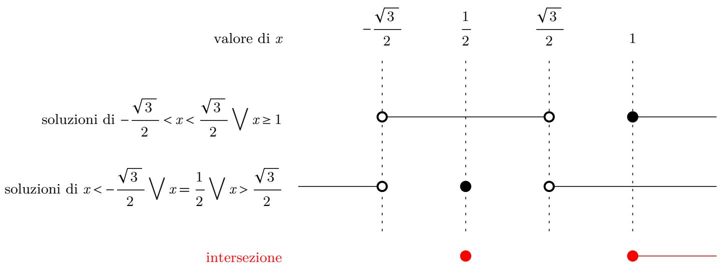
$$\sqrt{\frac{x-1}{4x^2-3}} \leq \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2-3} \geq 0 \\ \frac{1}{2} \geq 0 \\ \dfrac{x-1}{4x^2-3} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2-3} \geq 0 \\ \text{vero} \\ \dfrac{x-1}{4x^2-3} - \dfrac{1}{4} \leq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2-3} \geq 0 \\ \dfrac{4(x-1)-(4x^2-3)}{4(4x^2-3)} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2-3} \geq 0 \\ \dfrac{-4x^2+4x-1}{4(4x^2-3)} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2-3} \geq 0 \\ \dfrac{-(2x-1)^2}{4(4x^2-3)} \leq 0 \end{cases}$$



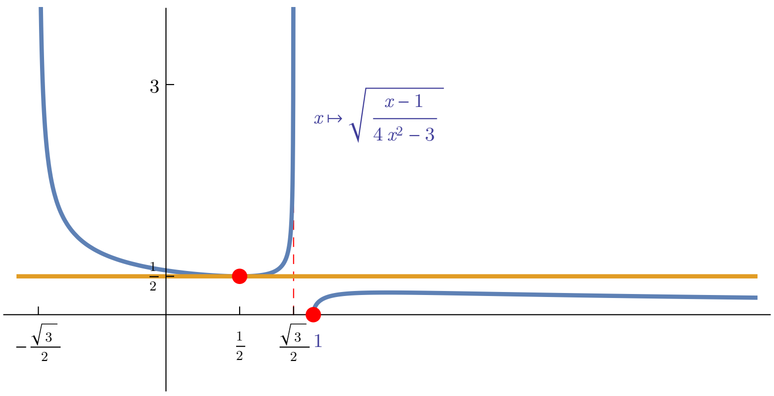


$$\iff \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq 1 \\ x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{1}{2} \vee x > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ x \leq 0 \\ -2 < x \vee x = -1 \vee x \geq 0 \end{cases} \iff$$



$$\iff \quad x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1.$$

Complemento. Per capacitarsi della soluzione isolata -1 forse può aiutare un grafico della funzione $x \mapsto \sqrt{(x-1)/(4x^2-3)}$:



4. È data la successione a_n definita per ricorrenza: $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$. Dobbiamo dimostrare che $a_n = 1 - (-3)^n$ per ogni n. Dato come è definita a_n, è naturale farlo per induzione. Il predicato $\mathcal{P}(n)$ è

$$\mathcal{P}(n) \quad \iff \quad a_n = 1 - (-3)^n.$$

Poiché nella definizione della successione a_n il termine successivo coinvolge i *due* termini precedenti, l'induzione richiederà *due* casi base $\mathcal{P}(0)$ e $\mathcal{P}(1)$, e il passo induttivo sarà $\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$. Nei casi base $n = 0$ il predicato è vero:

$$\mathcal{P}(0) \iff a_0 = 1 - (-3)^0 \iff 0 = 1 - 1 \iff \text{vero},$$
$$\mathcal{P}(1) \iff a_1 = 1 - (-3)^1 \iff 4 = 1 - (-3) \iff \text{vero}.$$

n	a_n	$\sum_{k=0}^{n} a_n$
0	0	0
1	4	4
2	-8	-4
3	28	24
4	-80	-56
5	244	188
6	-728	-540
7	2188	1648
8	-6560	-4912
9	19684	14772
10	-59048	-44276

Esplicitiamo $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1)$ e $\mathcal{P}(n+2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) &\iff a_n = 1-(-3)^n, \\ \mathcal{P}(n+1) &\iff a_{n+1} = 1-(-3)^{n+1}, \\ \mathcal{P}(n+2) &\iff a_{n+2} = 1-(-3)^{n+2} \end{aligned}$$

Proviamo a vedere se $\mathcal{P}(n+2)$ si può ottenere come combinazione di $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{P}(n+1)$. Dato che $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$, moltiplichiamo $\mathcal{P}(n)$ per 3, moltiplichiamo $\mathcal{P}(n+1)$ per -2, sommiamo membro a membro e manipoliamo la formula risultante:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(n) \\ \mathcal{P}(n+1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = 1-(-3)^n \\ a_{n+1} = 1-(-3)^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_n = 3(1-(-3)^n) \\ -2a_{n+1} = -2(1-(-3)^{n+1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 3a_n - 2(a_{n+1}) = 3(1-(-3)^n) - 2(1-(-3)^{n+1}) &\iff \\ a_{n+2} = 3 - 3(-3)^n - 2 + 2(-3)^{n+1} &\iff \\ a_{n+2} = 1 + (-3)^1(-3)^n + 2(-3)^{n+1} &\iff \\ a_{n+2} = 1 + (-3)^{n+1} + 2(-3)^{n+1} &\iff \\ a_{n+2} = 1 + 3(-3)^{n+1} &\iff \\ a_{n+2} = 1 - (-3)^1(-3)^{n+1} &\iff \\ a_{n+2} = 1 - (-3)^{n+2} &\iff \\ \mathcal{P}(n+2). & \end{aligned}$$

Il passo induttivo è verificato, e quindi $\mathcal{P}(n)$ è sempre vero. Passiamo ora all'altra cosa da dimostrare, che è un nuovo predicato:

$$\mathcal{Q}(n) \iff a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4}.$$

Un modo per dimostrare $\mathcal{Q}(n)$ è di sfruttare la formula non ricorsiva $a_n = 1-(-3)^n$, perché con questa è sufficiente il caso base $\mathcal{Q}(0)$:

$$\mathcal{Q}(0) \iff a_0 = \frac{4\cdot 0+3+(-3)^0}{4} \iff 0 = \frac{0+3-3}{4} \iff \text{vero}.$$

Esplicitiamo $\mathcal{Q}(n+1)$:

$$\mathcal{Q}(n+1) \iff a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4(n+1)+3+(-3)^{n+2}}{4}.$$

Il primo membro di $\mathcal{Q}(n+1)$ si ottiene dal primo membro di $\mathcal{Q}(n)$ aggiungendo a_{n+1}, il che suggerisce di aggiungere a_{n+1} ad ambo i membri di $\mathcal{Q}(n)$, con la speranza che ottenere entrambi i membri di $\mathcal{Q}(n+1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(n) \iff a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4} &\iff \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4} + a_{n+1} &\iff \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4} + 1 - (-3)^{n+1} &\iff \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4n+3+(-3)^{n+1}+4-4(-3)^{n+1}}{4} &\iff \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4(n+1)+3-3(-3)^{n+1}}{4} &\iff \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4(n+1)+3+(-3)^1(-3)^{n+1}}{4} &\iff \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \frac{4(n+1)+3+(-3)^{n+2}}{4} &\iff \\ \mathcal{Q}(n+1). & \end{aligned}$$

Si può dimostrare $\mathcal{Q}(n)$ anche senza usare la formula non ricorsiva $a_n = 1 - (-3)^n$: scriviamo $\mathcal{Q}(n-1)$, $\mathcal{Q}(n)$, $\mathcal{Q}(n+1)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(n-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = \frac{4(n-1)+3+(-3)^n}{4},\\
\mathcal{Q}(n) \quad &\Longleftrightarrow \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{4(n)+3+(-3)^{n+1}}{4},\\
\mathcal{Q}(n+1) \quad &\Longleftrightarrow \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = \frac{4(n+1)+3+(-3)^{n+2}}{4}.
\end{aligned}$$

Una combinazione delle tre uguaglianze che fa tornare $\mathcal{Q}(n+2)$ è la seguente: moltiplicare $\mathcal{Q}(n-1)$ per -3, moltiplicare $\mathcal{Q}(n)$ per 5, moltiplicare $\mathcal{Q}(n+1)$ per -1, e poi sommare membro a membro:

$$\mathcal{Q}(n-1) \wedge \mathcal{Q}(n) \wedge \mathcal{Q}(n+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}
-3a_0 - 3a_1 - \cdots - 3a_{n-1} &= -3 \cdot \frac{4(n-1)+3+(-3)^n}{4} \quad \wedge\\
5a_0 + 5a_1 + \cdots + 5a_{n-1} + 5a_n &= 5 \cdot \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4} \quad \wedge\\
-1a_0 - 1a_1 - \cdots - 1a_{n-1} - 1a_n - 1a_{n+1} &= -1 \cdot \frac{4(n+1)+3+(-3)^{n+2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + 4a_n - a_{n+1} = -3 \cdot \frac{4(n-1)+3+(-3)^n}{4} &+\\
+ 5 \cdot \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4} &-\\
- \frac{4(n+1)+3+(-3)^{n+2}}{4}&
\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \overbrace{3a_n - 2a_{n+1}}^{=a_{n+2}} = -3 \cdot \frac{4n-1+(-3)^n}{4} &+\\
+ 5 \cdot \frac{4n+3+(-3)^{n+1}}{4} &-\\
- \frac{4n+7+(-3)^{n+2}}{4}&
\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+2} = \frac{4n+11-3(-3)^n+5(-3)^{n+1}-(-3)^{n+2}}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+2} = \frac{4(n+2)+3-3(-3)^n+5(-3)(-3)^n-(-3)^2(-3)^n}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+2} = \frac{4(n+2)+3-27(-3)^n}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+2} = \frac{4(n+2)+3+(-3)^3(-3)^n}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+2} = \frac{4(n+2) + 3 + (-3)^{n+3}}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{Q}(n+2).$$

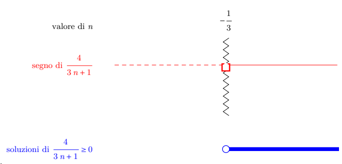
Con un passo induttivo come questo occorrono *tre casi base consecutivi* da cui far partire l'induzione:

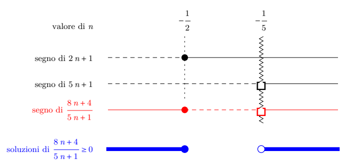
$$\mathcal{Q}(0) \iff a_0 = \frac{4 \cdot 0 + 3 + (-3)^1}{4} \iff 0 = \frac{0+3-3}{4} \iff \text{vero},$$
$$\mathcal{Q}(1) \iff a_0 + a_1 = \frac{4 \cdot 1 + 3 + (-3)^2}{4} \iff 0 + 4 = \frac{4+3+9}{4} \iff \text{vero},$$
$$\mathcal{Q}(2) \iff a_0 + a_1 + a_2 = \frac{4 \cdot 2 + 3 + (-3)^3}{4} \iff 0 + 4 - 8 = \frac{8+3-27}{4} \iff \text{vero}.$$

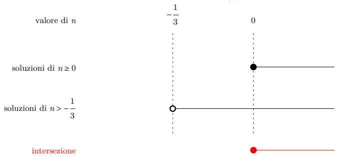
4. Dimostrare che $-1/3$ è l'estremo inferiore dell'insieme $X = \{(1-|n|)/(4n-|n|+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ significa dimostrare che $-1/3$ è minorante e che non ci sono minoranti più piccoli di $-1/3$. Vediamo se $-1/3$ è minorante, lavorando per ora come se n fosse variabile reale, invece che intera:

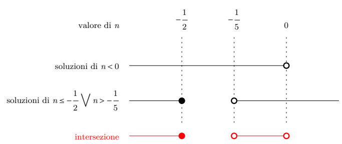
n	$\frac{1-\lvert n\rvert}{4n-\lvert n\rvert+1}$
-10	0.1837
-9	0.1818
-8	0.1795
-7	0.1765
-6	0.1724
-5	0.1667
-4	0.1579
-3	0.1429
-2	0.1111
-1	0.0000
0	1.0000
1	0.0000
2	-0.1429
3	-0.2000
4	-0.2308
5	-0.2500
6	-0.2632
7	-0.2727
8	-0.2800
9	-0.2857
10	-0.2903

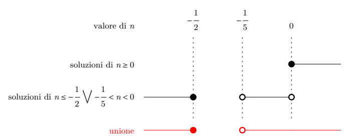
$$\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} \geq -\frac{1}{3} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{1-n}{4n-n+1} \geq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1-(-n)}{4n-(-n)+1} \geq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{1-n}{3n+1} + \dfrac{1}{3} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n}{5n+1} + \dfrac{1}{3} \geq 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{3-3n+3n+1}{3(3n+1)} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{3+3n+5n+1}{3(5n+1)} \geq 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4}{3n+1} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{8n+4}{5n+1} \geq 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n > -1/3 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n \leq -1/2 \vee n > -1/5 \end{cases} \iff$$
$$n \geq 0 \quad \vee \quad \big(n \leq -1/2 \vee -1/5 < n < 0\big) \iff$$
$$n \leq -1/2 \quad \vee \quad -1/5 < n \quad \Leftarrow \quad n \in \mathbb{Z}.$$











La disuguaglianza $(1-|n|)/(4n-|n|+1) \geq -1/3$ è vera per tutti gli n reali tali che $n \leq -1/2 \vee -1/5 < n$, che comprendono in particolare tutti gli $n \in \mathbb{Z}$. Quindi $-1/3$ è effettivamente un maggiorante.
Per decidere se $-1/3$ è il minimo si possono ripercorrere i conti precedenti con delle uguaglianze al posto delle disuguaglianze:

$$\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} = -\frac{1}{3} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{1-n}{4n-n+1} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1-(-n)}{4n-(-n)+1} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4}{3n+1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{8n+4}{5n+1} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \text{falso} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \text{falso} \quad \vee \quad n = -1/2 \quad \iff$$

$$n = -\frac{1}{2}.$$

Il valore $n = -1/2$ non è intero. Quindi il valore $-1/3$ non appartiene a X, e non può essere il minimo di X.
Per decidere se $\inf X$ è proprio uguale a $-1/3$ un tentativo può essere di calcolare i limiti per $n \to \pm\infty$ di $(1 - |n|)/(4n - |n| + 1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-|n|}{4n-|n|+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{4n-n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{3n+1} = -\frac{1}{3}.$$

Giacché il limite (quando esiste) è sempre compreso fra l'inf e il sup, cioè

$$\inf X \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1-|n|}{4n-|n|+1} \leq \sup X,$$

abbiamo che

$$\inf X \leq -\frac{1}{3} \leq \sup X.$$

Combinando questa con l'altra disuguaglianza $\inf X \geq -1/3$ già trovata, concludiamo che $\inf X = -1/3$.
Un modo concettualmente più elementare ma più laborioso per dimostrare che $\inf X = -1/3$ è far vedere che i numeri più grandi di $-1/3$ non sono minoranti, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ il numero $-1/3 + \varepsilon$ non è minorante, cioè esistono soluzioni intere della disequazione

$$\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} < -\frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Proviamo a risolverla:

$$\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} < -\frac{1}{3} - \varepsilon \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{1-n}{4n-n+1} < -\dfrac{1}{3} + \varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1-(-n)}{4n-(-n)+1} < -\dfrac{1}{3} + \varepsilon \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{1-n}{3n+1} + \dfrac{1}{3} - \varepsilon < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n}{5n+1} + \dfrac{1}{3} - \varepsilon < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{3-3n+3n+1-9\varepsilon n-3\varepsilon}{3(3n+1)} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{3+3n+5n+1-15\varepsilon n-3\varepsilon}{3(5n+1)} < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{-9\varepsilon n+4-3\varepsilon}{3n+1} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{(8-15\varepsilon)n+4-3\varepsilon}{5n+1} < 0 \end{cases} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{-9\varepsilon n+4-3\varepsilon}{\underbrace{3n+1}_{>0}} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ -9\varepsilon n+4-3\varepsilon < 0 \end{cases} \iff$$

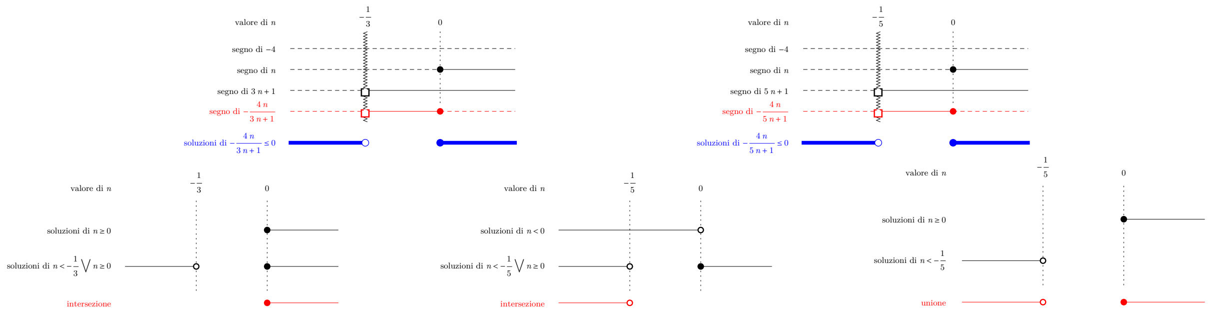
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ 9\varepsilon n-4+3\varepsilon > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n > \dfrac{4-3\varepsilon}{9\varepsilon} \end{cases}$$

L'ultimo sistema ha certamente soluzioni con n intero per il principio di Archimede, qualunque sia il valore di $\varepsilon > 0$. Si conferma che $-1/3$ è l'estremo inferiore di X.
Dire che 1 è il massimo di X vuol dire che è un maggiorante e che appartiene a X. Che sia un maggiorante significa che la disuguaglianza

$$\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} \le 1$$

è verificata per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Facciamo il conto con n reale:

$$\begin{aligned}
\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} \le 1 \quad &\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{1-n}{4n-n+1} \le 1 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n}{4n+n+1} \le 1 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{1-n}{3n+1} - 1 \le 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n}{5n+1} - 1 \le 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{1-n-3n-1}{3n+1} \le 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n-5n-1}{5n+1} \le 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{-4n}{3n+1} \le 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-4n}{5n+1} \le 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ n < -1/3 \vee n \ge 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ n < -1/5 \vee n \ge 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad n \ge 0 \quad \vee \quad n < -1/5 \quad \Leftarrow \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$



I valori reali di n che verificano la disuguaglianza coprono tutti i valori di $\mathbb{Z}$. Quindi effettivamente 1 è un maggiorante di X. Per vedere se 1 è massimo ripercorriamo il conto con uguaglianze al posto di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
\frac{1-|n|}{4n-|n|+1} = 1 \quad &\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{1-n}{4n-n+1} = 1 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n}{4n+n+1} = 1 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{1-n}{3n+1} - 1 = 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n}{5n+1} - 1 = 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{1-n-3n-1}{3n+1} = 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{1+n-5n-1}{5n+1} = 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{-4n}{3n+1} = 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-4n}{5n+1} = 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad \begin{cases} n \ge 0 \\ n = 0 \end{cases} \vee \quad \begin{cases} n < 0 \\ n = 0 \end{cases} \iff \\
&\iff \quad n = 0 \quad \vee \quad \text{falso} \quad \iff \quad n = 0.
\end{aligned}$$

Il valore 1 è raggiunto quando $n = 0 \in \mathbb{Z}$. Quindi $1 = \max X$. Il calcolo del limite per $n \to -\infty$

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1-|n|}{4n-|n|+1} = \lim_{n\to-\infty} \frac{1+n}{5n+1} = \frac{1}{5}$$

avrebbe dato l'informazione che $\sup X \ge 1/5$, che è vera ma di nessuna utilità ai nostri fini.

Complemento. La struttura dell'insieme X: