Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 2 settembre 2013

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x + (e^x - 2\cos x)\operatorname{sen} x}{e^{x^2} - \cos x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(16x^2+8x)\cos x + (2-6x)\operatorname{sen} x - 5e^x \operatorname{sen} 2x}{(1-\sqrt{\cos x})\log(1-x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \sqrt{\log(1+x^2)}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2-x} - \sqrt{4x^2-x}\right)$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x}{x^3+2}$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** il segno di $f(x)$, i limiti sulla frontiera del dominio ed eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **(e)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{2x^3-x^2+3}{x^2-2x+5}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,,\qquad \text{(c)}\quad (e^x - e^{-x})\operatorname{sen} x\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{(2x+1)\sqrt{2x-1}}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt{2x-1}$.

5. Dimostrare per induzione su n che vale la disuguaglianza $\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^n \geq 1 + 2nx$ quando $-1 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$.
(Si può fare in modo simile alla disuguaglianza di Bernoulli).

Punti: 3+4+3+3, 1+3+3+3+1, 4+3+4, 7, 7.