Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 17 luglio 2013

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)e^{2x} + 2\sqrt{1-x} - 4(x^2-x)\cos x}{\cos(x/2) - e^{x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)^2 - 3(x^3-2x^2)e^x - 2 + 2\cos 3x}{(1-\cos x)(1-\sqrt{x+1})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \sqrt{2-2\cos x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \log(e^x - 2^x) \cdot \operatorname{sen} \frac{x-1}{1-x^2}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{3(x^2+4x)}{4(x+1)} - \log|3x+1|$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **(e)** si mostri che $f(x)$ si annulla in esattamente tre punti, di cui uno è $x = 0$; **(f)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)} \quad \frac{x^3-2x+3}{x^2-2x+5}, \quad \text{(b)} \quad \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x}{1 + x^2\cos^2 x}, \quad \text{(c)} \quad e^x \operatorname{sen}^2 x\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}(2x-2)}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x-2}$.

5. Dimostrare per induzione su n che $n^n \le e^n n!$ per ogni $n \ge 1$.
(Moltiplicare ambo i membri per $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)$).

Punti: 3+4+3+3, 1+3+3+3+3+1, 4+2+4, 7, 7.