Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 20 giugno 2013

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen} x)\cos x}{\left(\log(1+x)-\log(1-x)\right)\tan^2 x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x}+\operatorname{sen} x)-\sqrt[3]{8-x}}{2\cos x-\sqrt{4+\operatorname{sen} x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x}-72(1-x)^{3/2}-23\operatorname{sen} 3x-72(x-1)\cos^2 x}{(2x^2-x+1)(\cos x-\cos 3x)\operatorname{sen} x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-2e^{\operatorname{sen} x}\cos 3x+\arctan x}{e^{x-x^2}-e^x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x+\sqrt{2x^3+x^2}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)^n}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-3x+2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=4x-x^2-\pi+4\arctan\dfrac{1-x}{x+1}$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty)=\pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1)=\pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x)=0$ soltanto per $x=0$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni 2^{2-x}, $\log(1/x)$, $\operatorname{sen}(1/x)$, $1/\sqrt{x}$, $10^{x/2}$, e^{x+3}, $\sqrt{x^2+1}$, $x/\log x$, dire quali sono infinitesime o infinite per $x\to+\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{3x^3-x}{x^2+4x+5}$, (b) $\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}-\dfrac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$, (c) $(1-x)e^{x^2-2x}$, (d) $x\operatorname{sen}(\log x)$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x=-t^2/(2t+2)$.

Punti: 3+4+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 20 giugno 2013

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2(x-2\cos x)+2e^{1-\cos x}-5\operatorname{sen} x\cos x}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)\big(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x(x+2)^2+(2x-1)e^{-x}+11(1-\operatorname{sen} x)\cos x-10}{\big(\log(1+x)+\log(1-2x)\big)\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{-\cos x}+\operatorname{sen} x)+\sqrt[3]{x+1}}{\cos 2x-\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{11(2x^2-x)e^{-x}-24(x+1)^{3/2}+95\operatorname{sen} x-24(2x-1)\cos^2 x}{(x^2-x+3)(\cos 3x-\cos x)\operatorname{sen} x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-3\arctan x-e^{\operatorname{sen} 2x}\cos x}{e^x-e^{x+x^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(3n+1)!}{(2n)!(2n)^n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x-\sqrt{x^2-x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x+2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = 4\arctan\Big(\dfrac{x+1}{1-x}\Big) - x^2 - 4x - \pi$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', crescenza/decrescenza, punti di massimo/minimo; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x) = 0$ soltanto per $x = 0$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni $\sqrt{x^2+1}$, 2^{2-x}, $x/\log x$, $\operatorname{sen}(1/x)$, $1/\sqrt{x}$, e^{x+3}, $\log(1/x)$, $10^{x/2}$, dire quali sono infinitesime o infinite per $x \to +\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{2x^3+3x}{x^2-4x+5}$, (b) $\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2} - \dfrac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen}(2x))}{\sqrt{1-4x^2}}$, (c) $(1-x)e^{x^2-2x}$, (d) $x\cos(\log x)$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(2t-2)$.

Punti: 3+4+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 20 giugno 2013

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)^2 + 4(2x+1)e^{-x} - 4(1+\operatorname{sen} 2x)\cos x}{\big(\log(1+2x) - \log(1+x)\big)\tan^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{-\cos x} + \operatorname{sen} x) + \sqrt[3]{1-2x}}{\cos 3x - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2(2x-\cos x) + e^{1-\cos x} - 4\operatorname{sen} x\cos x}{\big(3-\sqrt{x+9}\big)\big(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\big)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{11(x^2-2x)e^{-x} - 24(x+1)^{3/2} + 10\operatorname{sen} x + 24(2x+1)\cos^2 x}{(x^2-3x+1)(\cos x - \cos 2x)\operatorname{sen} 3x}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!(2n)^n}{(3n+1)!}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \arctan x - e^{\operatorname{sen} 2x}\cos x}{e^x - e^{x+x^2}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x + \sqrt{x^2 - x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-3x+1}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = x^2 - 4x + \pi - 4\arctan\dfrac{1-x}{x+1}$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x) = 0$ soltanto per $x = 0$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni e^{x+3}, 2^{2-x}, $\sqrt{x^2+1}$, $10^{x/2}$, $\log(1/x)$, $\operatorname{sen}(1/x)$, $x/\log x$, $1/\sqrt{x}$, dire quali sono infinitesime o infinite per $x \to +\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a)$\dfrac{x-2x^3}{x^2-2x+5}$, (b)$\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2} - \dfrac{1+\tan^2(\operatorname{arcsen}(3x))}{\sqrt{1-9x^2}}$, (c)$(x^2-1)e^{3x-x^3}$, (d)$x\operatorname{sen}(\log x)$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(4t+1)$.

Punti: 4+3+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 20 giugno 2013

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x(x-2)^2 - 68 + 12(x+1)e^{2x} + 56(1-\operatorname{sen} x)\cos x}{\big(\log(1-2x) - \log(1+x)\big)\operatorname{sen}^2 x \cos 3x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\log(e^{\cos x} - \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{x+8}}{\cos x - \sqrt{1+3\operatorname{sen} x}}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2(x-\cos x) + 3\cos^2 x + e^{1-\cos x}}{\big(2-\sqrt{x+4}\big)\big(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\big)}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{22(x^2-x)e^{2x} + 16(1-x)^{3/2} + 31\operatorname{sen} 2x - 16(x+1)\cos^2 x}{(x^2-x+3)(\cos x - \cos 2x)\operatorname{sen} 3x}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2 - \arctan x - 2e^{\operatorname{sen} x}\cos 2x}{e^{x-x^2} - e^x}$

f) $\lim_{n\to +\infty} \dfrac{n!(n+2)^n}{(2n+1)!}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 + 3x + 1}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti agli estremi del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f; **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = x^2 + 4x + \pi - 4\arctan \dfrac{x+1}{1-x}$, (ricordando che $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$, $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$) trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g''; **e)** mostrare che $g(x) = 0$ soltanto per $x = 0$, e che il grafico ha esattamente due flessi; **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni $\operatorname{sen}(1/x)$, e^{x+3}, 2^{2-x}, $\sqrt{x^2+1}$, $10^{x/2}$, $1/\sqrt{x}$, $x/\log x$, $\log(1/x)$, dire quali sono infinitesime o infinite per $x \to +\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Calcolare primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{3x - x^3}{x^2 + 2x + 5}$, (b) $\dfrac{e^{\arctan(3x)}}{1+9x^2} - \dfrac{1 + \tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$, (c) $(1-x^2)e^{x^3-3x}$, (d) $x\operatorname{sen}(\log x)$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $x = -t^2/(4t-1)$.

Punti: 4+3+3+4+3+3+3, 8, 10, 7, 3+3+2+4, 6.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 20 giugno 2013

Svolgimento

1. a. Il limite

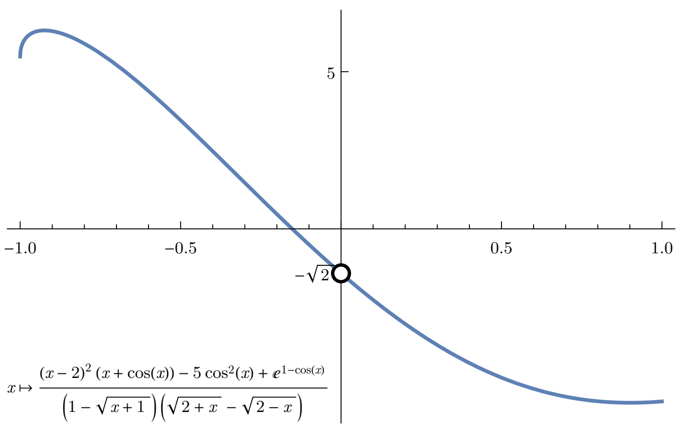
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)\big(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\big)}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore è un prodotto di differenze di radici, che si possono semplificare:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{\big(1-\sqrt{x+1}\big)\big(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\big)}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{\big(1^2-(x+1)\big)\big((2+x)-(2-x)\big)}\cdot\underbrace{\big(1+\sqrt{x+1}\big)\big(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\big)}_{\to(1+1)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\\
&\quad=4\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{(-x)(2x)}=\\
&\quad=-2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{x^2}
\end{aligned}$$

Non intravvedendo ulteriori semplificazioni, rimanendo una forma $0/0$ applichiamo L'Hôpital quante volte serve:

$$\begin{aligned}
&-2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)^2(x+\cos x)-5\cos^2 x+e^{1-\cos x}}{x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=-\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{2(x-2)(x+\cos x)+(x-2)^2(1-\operatorname{sen}x)+10\operatorname{sen}x\cos x+e^{1-\cos x}\operatorname{sen}x}{x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=-\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\Big(2(x+\cos x)+2(x-2)(1-\operatorname{sen}x)+2(x-2)(1-\operatorname{sen}x)+(x-2)^2(-\cos x)+\\
&\qquad\qquad+10\cos^2 x-10\operatorname{sen}^2 x+e^{1-\cos x}\operatorname{sen}^2 x+e^{1-\cos x}\cos x\Big)=\\
&\quad=-\sqrt{2}\Big(2(0+1)+2(0-2)(1-0)+2(0-2)(1-0)+(0-2)^2(-1)+\\
&\qquad\qquad+10-10\cdot 0+e^{1-1}0+e^{1-1}1\Big)=-\sqrt{2}\Big(2-4-4-4+10+1\Big)=-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$



b. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{\big(\log(1+x)-\log(1-x)\big)\tan^2 x}$$

si presenta nella forma $0/0$. Il denominatore si può semplificare sfruttando la formula $\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ e il limite notevole $(\operatorname{sen}x)/x\to 1$ per $x\to 0$:

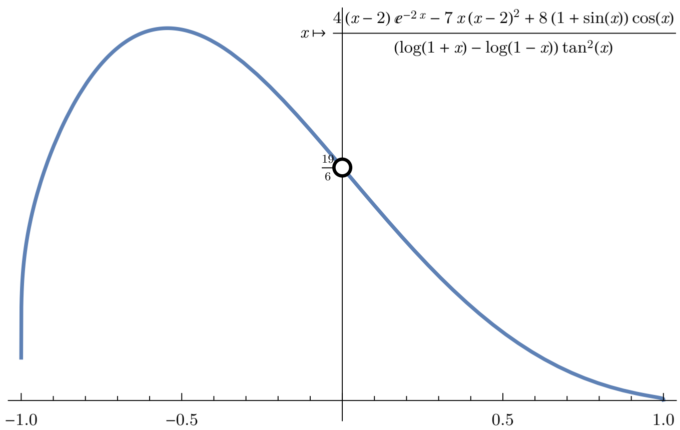
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{\big(\log(1+x)-\log(1-x)\big)\tan^2 x}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{\big(\log(1+x)-\log(1-x)\big)x^2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2\frac{1}{\cos^2 x}}_{\to 1\cdot 1}}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{\big(\log(1+x)-\log(1-x)\big)x^2}.
\end{aligned}$$

Proviamo a vedere se al denominatore si può sfruttare anche il limite notevole $(\log(1+x))/x\to 1$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{\big(\log(1+x)-\log(1-x)\big)x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{\Big(x\frac{\log(1+x)}{x}-(-x)\frac{\log(1-x)}{-x}\Big)x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{x^3}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{\log(1-x)}{-x}}_{\to 1+1}}=\\
&\quad=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{x^3}.
\end{aligned}$$

Possiamo applicare la regola de L'Hôpital quante volte occorre:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4(x-2)e^{-2x}-7x(x-2)^2+8(1+\operatorname{sen}x)\cos x}{x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\Big(4e^{-2x}+4(x-2)e^{-2x}(-2)-7(x-2)^2-7x\cdot 2(x-2)+\\
&\qquad\qquad+8(1+\cos x)\cos x+8(\operatorname{sen}x)(-\operatorname{sen}x)\Big)=\\
&\quad=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(4e^{-2x}(5-2x)-7(x-2)^2-14x^2+28x+\\
&\qquad\qquad+8\cos^2 x-8(1+\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\Big(4e^{-2x}(-2)(5-2x)+4e^{-2x}(-2)-7\cdot 2(x-2)-14\cdot 2x+28+\\
&\qquad\qquad+8\cdot 2(\cos x)(-\operatorname{sen}x)-8\cos x\operatorname{sen}x-8(1+\operatorname{sen}x)\cos x\Big)=\\
&\quad=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(-8e^{-2x}(6-2x)-42x+56-32\operatorname{sen}x\cos x-8\cos x\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\\
&\quad=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1}\Big(16e^{-2x}(6-2x)-8e^{-2x}(-2)-42-32\cos^2 x+32\operatorname{sen}^2 x+8\operatorname{sen}x\Big)=\\
&\quad=\frac{1}{12}\Big(16\cdot 6-8\cdot(-2)-42-32\cdot 1+32\cdot 0+8\cdot 0\Big)=\frac{1}{12}\Big(16\cdot 6+16-42-32\Big)=\frac{38}{12}=\frac{16}{9}.
\end{aligned}$$



c. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{2\cos x - \sqrt{4+\operatorname{sen} x}}$$

si presenta nella forma

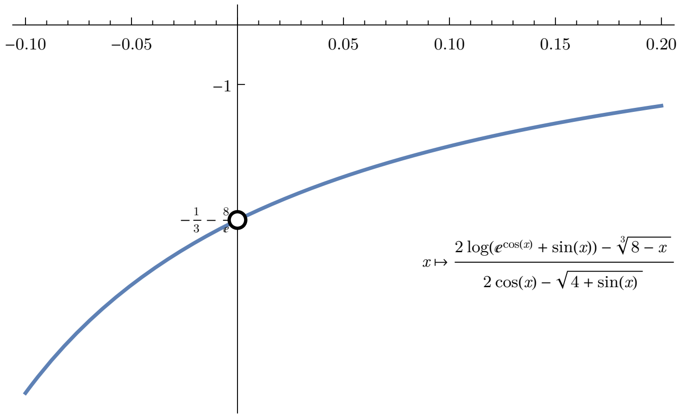
$$\frac{2\log(e^1 + 0) - \sqrt[3]{8}}{2 - \sqrt{4}} = \frac{2\log e - 2}{2-2} = \frac{2\cdot 1 - 2}{0} = \frac{0}{0}.$$

Si può eliminare la radice al denominatore moltiplicando e dividendo per un'opportuna espressione che tende a un numero non nullo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{2\cos x - \sqrt{4+\operatorname{sen} x}} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{\left(2\cos x - \sqrt{4+\operatorname{sen} x}\right)\left(2\cos x + \sqrt{4+\operatorname{sen} x}\right)} \cdot \overbrace{\left(2\cos x + \sqrt{4+\operatorname{sen} x}\right)}^{\to 2+2=4} = \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{(2\cos x)^2 - (4+\operatorname{sen} x)} = 4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{4\cos^2 x - 4 - \operatorname{sen} x} = \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{4(1-\operatorname{sen}^2 x) - 4 - \operatorname{sen} x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{-4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x} = \\
&= 4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{(-4\operatorname{sen} x - 1)\operatorname{sen} x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{x} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1}} \cdot \frac{1}{\underbrace{-4\operatorname{sen} x - 1}_{\to -1}} \\
&= -4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{x}
\end{aligned}$$

Applichiamo la regola de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
&-4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - \sqrt[3]{8-x}}{x} = -4\lim_{x\to 0} \frac{2\log(e^{\cos x} + \operatorname{sen} x) - (8-x)^{1/3}}{x} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&\quad = -4\lim_{x\to 0} \frac{2\frac{1}{e^{\cos x} + \operatorname{sen} x}\left(e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x) + \cos x\right) - \frac{1}{3}(8-x)^{1/3-1}(-1)}{1} = \\
&\quad = -4\left(2\frac{1}{e^1+0}(e^1\cdot 0 + 1) + \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\right) = -4\left(\frac{2}{e} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2^3)^{2/3}}\right) = -4\left(\frac{2}{e} + \frac{1}{12}\right) = -\frac{8}{e} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



d. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(2x^2-x+1)(\cos x - \cos 3x)\operatorname{sen} x}$$

si presenta nella forma

$$\frac{33\cdot 0 - 72\cdot 1^{3/2} - 0 - 72(-1)\cdot 1}{(0-0+1)(1-1)\cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Il primo fattore al denominatore tende a 1, e quindi si può eliminare:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(2x^2-x+1)(\cos x - \cos 3x)\operatorname{sen} x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(\cos x - \cos 3x)\operatorname{sen} x}\,\frac{1}{\underbrace{2x^2-x+1}_{\to 1}} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(\cos x - \cos 3x)\operatorname{sen} x}.
\end{aligned}$$

Si può ulteriormente semplificare il denominatore moltiplicando e dividendo per x, in modo da sfruttare il limite notevole $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(\cos x - \cos 3x)\operatorname{sen} x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(\cos x - \cos 3x)x} \cdot \frac{1}{\underbrace{(\operatorname{sen} x)/x}_{\to 1}} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(\cos x - \cos 3x)x}.
\end{aligned}$$

Si può tentare una terza semplificazione aggiungendo e togliendo 1 nel primo fattore al denominatore per sfruttare il limite notevole $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{(\cos x - \cos 3x)x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{\big(-(1-\cos x) + (1-\cos 3x)\big)x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{\big(-x^2\frac{1-\cos x}{x^2} + (3x)^2\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\big)x} = \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{x^2\cdot x} \cdot \frac{1}{\underbrace{-\frac{1-\cos x}{x^2} + (3)^2\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}}_{\to -1/2+3^2/2=4}} = \\
&\quad = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{33(x^2+x)e^{2x} - 72(1-x)^{3/2} - 23\operatorname{sen} 3x - 72(x-1)\cos^2 x}{x^3}
\end{aligned}$$

Applichiamo la regola de L'Hôpital quante volte serve:

$$\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{33(x^2+x)e^{2x}-72(1-x)^{3/2}-23\operatorname{sen}3x-72(x-1)\cos^2 x}{x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\Big(33(2x+1)e^{2x}+33(x^2+x)e^{2x}2-72(3/2)(1-x)^{3/2-1}(-1)-23\cdot 3\cos 3x-$$

$$-72\cdot 1\cos^2 x-72(x-1)2(\cos x)(-\operatorname{sen}x)\Big)=$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(33(2x+1+2x^2+2x)e^{2x}+108(1-x)^{1/2}-69\cos 3x-$$

$$-72\cos^2 x+144(x-1)\operatorname{sen}x\cos x\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\Big(33(4+4x)e^{2x}+33(4x+1+2x^2)e^{2x}2+$$

$$+108(1/2)(1-x)^{-1/2}(-1)+69\cdot 3\operatorname{sen}3x-72\cdot 2(\cos x)(-\operatorname{sen}x)+$$

$$+144\operatorname{sen}x\cos x+144(x-1)\cos x\cos x+144(x-1)(\operatorname{sen}x)(-\operatorname{sen}x)\Big)=$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(66(2+2x+4x+1+2x^2)e^{2x}+$$

$$-54(1-x)^{-1/2}+207\operatorname{sen}3x+288\cos x\operatorname{sen}x+$$

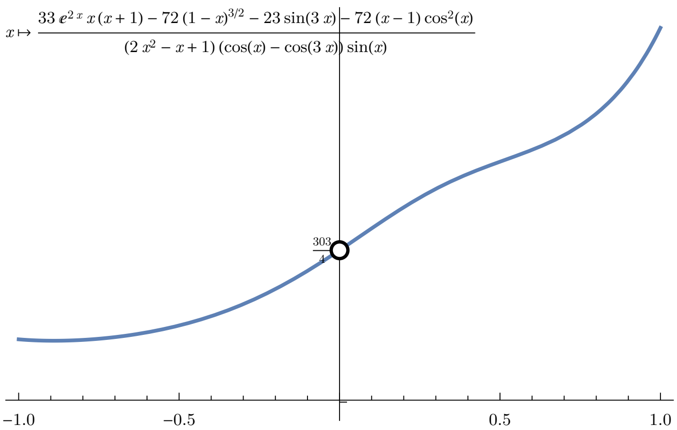
$$+144(x-1)(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)\Big)\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\Big(66(4x+6)e^{2x}+66(2x^2+6x+3)e^{2x}2+$$

$$-54(-1/2)(1-x)^{-3/2}(-1)+207\cdot 3\cos 3x+288(-\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x+288\cos x\cos x+$$

$$+144(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)+144(x-1)\big(2(\cos x)(-\operatorname{sen}x)-2\operatorname{sen}x\cos x\big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{24}\Big(66\cdot 6+66\cdot 3\cdot 2-27+207\cdot 3+0+288+144+0\Big)=\frac{1818}{24}=\frac{303}{4}.$$



e. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{\operatorname{sen}x}\cos 3x+\arctan x}{e^{x-x^2}-e^x}$$

si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo scomporre in fattori il denominatore grazie alle proprietà delle potenze e poi usare il limite notevole $(e^t-t)/t\to 1$ per $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{\operatorname{sen}x}\cos 3x+\arctan x}{e^{x-x^2}-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{\operatorname{sen}x}\cos 3x+\arctan x}{e^x e^{-x^2}-e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{\operatorname{sen}x}\cos 3x+\arctan x}{e^{-x^2}-1}\cdot\frac{1}{e^x}=$$

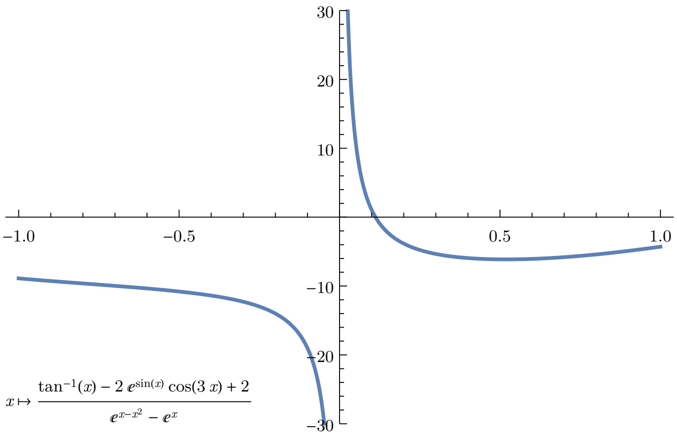
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{\operatorname{sen}x}\cos 3x+\arctan x}{-x^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{(e^{-x^2}-1)/(-x^2)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 1}=$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2e^{\operatorname{sen} x}\cos 3x + \arctan x}{x^2}$$

La forma è ancora 0/0. Applichiamo la regola de L'Hôpital quante volte serve:

$$\begin{aligned}
-\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2e^{\operatorname{sen} x}\cos 3x + \arctan x}{x^2} &\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\left(-2e^{\operatorname{sen} x}\cos x\cos 3x - 2e^{\operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} 3x)3 + \frac{1}{1+x^2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(\underbrace{-2(\cos x\cos 3x - 3\operatorname{sen} 3x)e^{\operatorname{sen} x} + (1+x^2)^{-1}}_{\to -2+1=-1}\Big) = \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{per } x\to 0^+, \\ -\infty & \text{per } x \to 0^-. \end{cases}
\end{aligned}$$

Il limite cercato strettamente parlando non esiste, oppure è ∞ senza segno.



f. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{x + \sqrt{2x^3 + x^2}}$$

si presenta nella forma indeterminata 0/0. Il numeratore si può semplificare usando il limite notevole $(e^x - 1)/x \to 1$ per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{x + \sqrt{2x^3 + x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sqrt{2x^3 + x^2}} \cdot \Big(-\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1}\Big) = -\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sqrt{2x^3 + x^2}}.$$

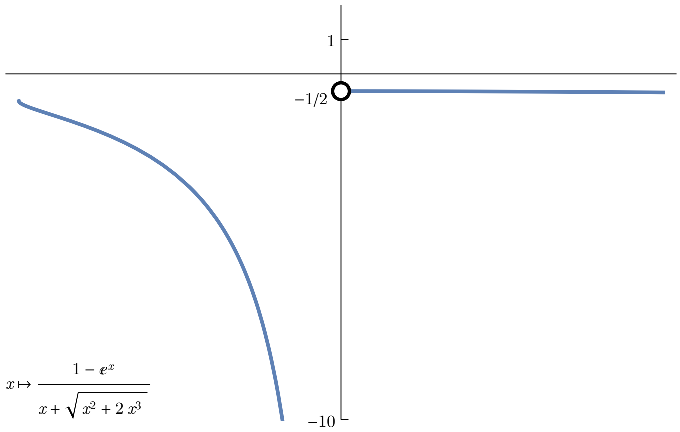
Dentro la radice quadrata si può raccogliere x^2, che portato fuori radice diventa $|x|$:

$$-\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sqrt{2x^3 + x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + |x|\sqrt{2x+1}}.$$

Distinguiamo il limite destro e sinistro, semplificando il fattore comune x:

$$\begin{aligned}
-\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x + |x|\sqrt{2x+1}} &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x + x\sqrt{2x+1}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{1+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}, \\
-\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x + |x|\sqrt{2x+1}} &= -\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x - x\sqrt{2x+1}} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1 - \sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{1-\sqrt{1^-}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty.
\end{aligned}$$

Essendo diversi i limiti da sinistra e da destra, il limite iniziale non esiste.



g. Il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)^n}$$

si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Scrivendo per esteso i fattoriali si possono cancellare i fattori $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)^n} &= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)(n)(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n)(n-1)\cdot 2\cdot 1\cdot (n+1)^n} \\
&= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}{(n+1)^n} = \\
&= \frac{\overbrace{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}^{(2n+1)-n=n+1 \text{ fattori digradanti}}}{\underbrace{(n+1)(n+1)\cdots(n+1)(n+1)}_{n \text{ fattori tutti uguali}}} = \\
&= (2n+1)\cdot \underbrace{\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{n+1}\cdot\frac{2n-2}{n+1}\cdots\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}}_{\text{ciascun numeratore è} \geq \text{del denominatore}} \geq \\
&\geq (2n+1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1 = \\
&= 2n+1.
\end{aligned}$$

Poiché $2n-1 \to +\infty$ per $n \to +\infty$, per il teorema del confronto il limite cercato esiste ed è $+\infty$.

n	$\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)^n}$
1	3.0
2	6.7
3	13.1
4	24.2
5	42.8
6	73.5
7	123.7
8	204.9
9	335.2
10	542.8
11	871.7
12	1389.9
13	2203.1
14	3474.2
15	5454.1
16	8528.7
17	13290.2
18	20645.8
19	31983.1
20	49421.8

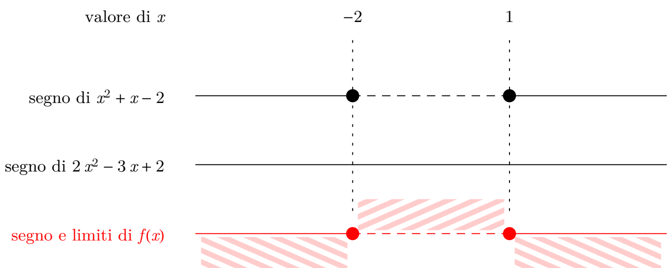
2. a. La funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 3x + 2}$$

è definita dove il denominatore non si annulla. Il discriminante del denominatore è $\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9 - 16 < 0$. Quindi il denominatore non si annulla mai (anzi, è sempre > 0), e il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Le radici del numeratore sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1. \end{cases}$$

Il segno di f si studia con lo schema seguente:



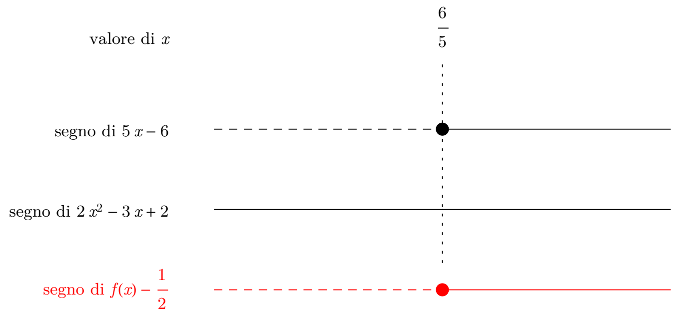
b. Gli estremi del dominio sono soltanto $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-2}{2x^2-3x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}}{2-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0-0}{2-0+0} = \frac{1}{2}.$$

c. Poiché la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ non ci sono asintoti verticali. Poiché $f(x) \to 1/2$ per $x \to \pm\infty$, la retta $y = 1/2$ è asintoto orizzontale da entrambi i lati. Essendoci l'asintoto orizzontale, questo è anche obliquo. Facoltativamente vediamo in che posizione sta il grafico rispetto all'asintoto:

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^2+x-2}{2x^2-3x+2} - \frac{1}{2} = \frac{2(x^2+x-2)-(2x^2-3x+2)}{2(2x^2-3x+2)} = \frac{5x-6}{2(2x^2-3x+2)}.$$

Lo studio del segno di $f(x) - 1/2$ è nello schema seguente. Si deduce che il grafico attraversa l'asintoto nel punto di ascissa $6/5$, sta sotto a sinistra e sopra a destra.



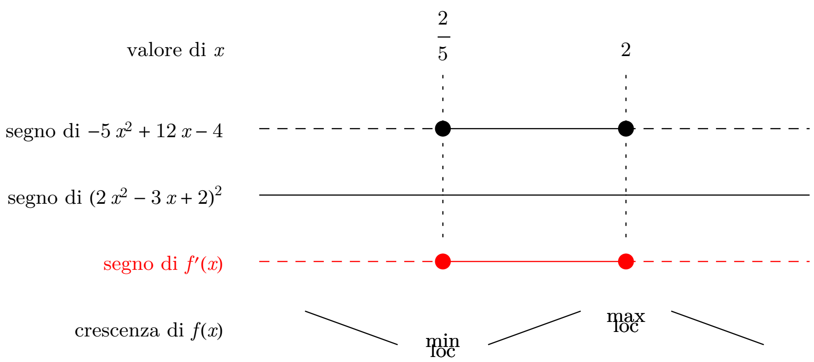
d. La derivata di f è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(2x^2-3x+2)-(x^2+x-2)(4x-3)}{(2x^2-3x+2)^2} = \\ &= \frac{4x^3-6x^2+4x+2x^2-3x+2-(4x^3-3x^2+4x^2-3x-8x+6)}{(2x^2-3x+2)^2} = \\ &= \frac{4x^3-4x^2+x+2-4x^3-x^2+11x-6}{(2x^2-3x+2)^2} = \\ &= \frac{-5x^2+12x-4)}{(2x^2-3x+2)^2}. \end{aligned}$$

Il discriminante (ridotto) del numeratore $-5x^2+12x-4$ è $\Delta/4 = 6^2-5\cdot 4 = 36-20 = 16 = 4^2$, e quindi $f'(x)$ si annulla per

$$x = \frac{-6\mp 4}{-5} = \begin{cases} 2 \\ 2/5. \end{cases}$$

Lo studio del segno di $f'(x)$ e della monotonia di f è nello schema seguente.



e. Nel calcolo della derivata seconda conviene raccogliere il fattore comuni e semplificare prima di moltiplicare:

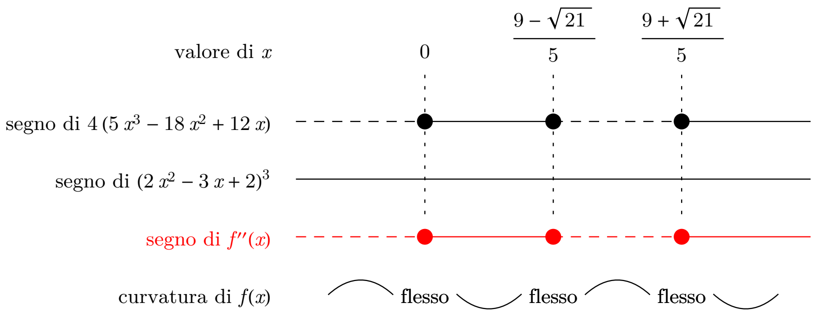
$$f''(x) = \frac{(-10x+12)(2x^2-3x+2)^2-(-5x^2+12x-4)2(2x^2-3x+2)(4x-3)}{(2x^2-3x+2)^4} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-10x+12)(2x^2-3x+2)-(-5x^2+12x-4)2(4x-3)}{(2x^2-3x+2)^3} = \\
&= 2\frac{(-5x+6)(2x^2-3x+2)+(5x^2-12x+4)(4x-3)}{(2x^2-3x+2)^3} = \\
&= 2\frac{-10x^3+15x^2-10x+12x^2-18x+12+20x^3-15x^2-48x^2+36x+16x-12}{(2x^2-3x+2)^3} = \\
&= \frac{4x(5x^2-18x+12)}{(2x^2-3x+2)^3}.
\end{aligned}
$$

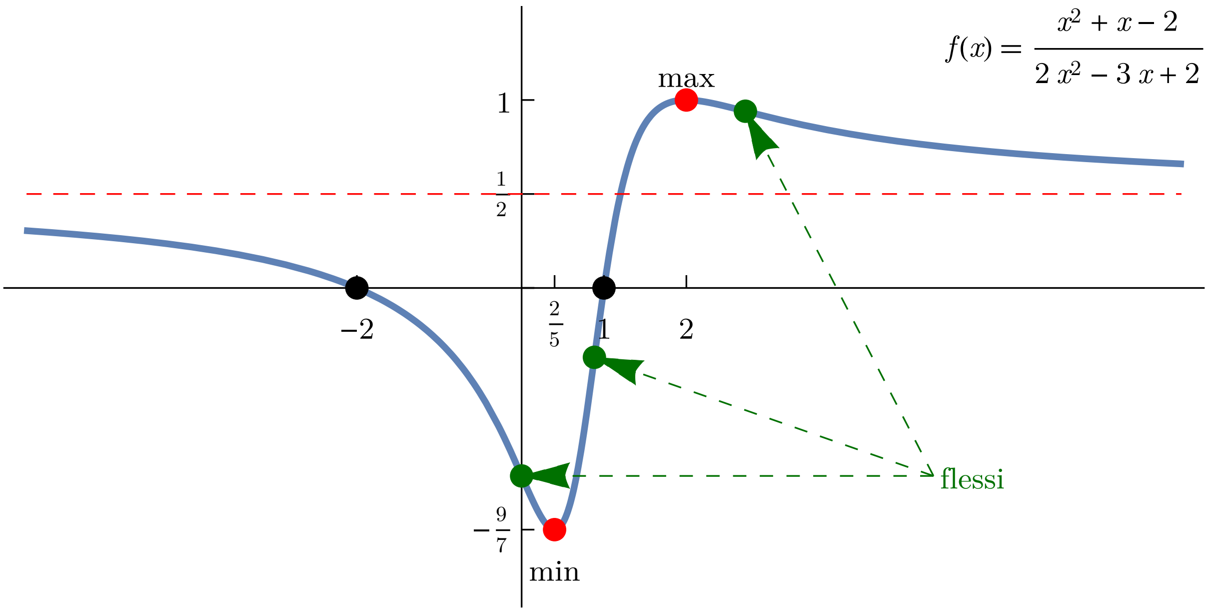
Il polinomio $5x^2-18x+12$ ha discriminante (ridotto) $\Delta/4 = 9^2 - 5\cdot 12 = 21$, e quindi si annulla per $x = (9\pm\sqrt{21})/5$. I punti notevoli del grafico sono nell'ordine seguente:

$$-2 < 0 < 2/5 < \frac{9-\sqrt{21}}{5} < 1 < \frac{6}{5} < 2 < \frac{9+\sqrt{21}}{5}$$

Lo studio del segno di $f''(x)$ e della convessità/concavità di f è come segue:



f. Il grafico di f ha l'aspetto seguente. I punti $2/5$ e 2 sono di minimo e massimo non solo locale, ma anche globale.



3.a. Nella formula della funzione

$$g(x) = 4x - x^2 - \pi + 4\arctan\frac{1-x}{x+1}$$

l'unica operazione che ha restrizioni è la divisione (l'arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$). Quindi

$$\operatorname{dom} g = \{x\in\mathbb{R} : x+1\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x\neq -1\} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Gli estremi del dominio sono $-1, -\infty, +\infty$. I limiti agli estremi si calcolano così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\Big(4x - x^2 - \pi + 4\arctan\frac{1-x}{x+1}\Big) = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \overbrace{x^2}^{\to+\infty}\Bigg(\overbrace{\frac{4}{x} - 1 - \frac{\pi}{x^2}}^{\to 0-1-0=-1} + \overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}\cdot \overbrace{\arctan\underbrace{\Big(\frac{1-x}{x+1}\Big)}_{\to -1}}^{\to\arctan(-1)=-\pi/4}\Bigg) = \\
&= +\infty(-1+0) = -\infty, \\
\lim_{x\to-1^-} g(x) &= \lim_{x\to-1^-}\Big(\overbrace{4x - x^2 - \pi}^{\to -4-1-\pi} + 4\arctan\overbrace{\frac{1-x}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}}}^{\to 2}\Big) = \\
&= -5 - \pi + 4\arctan(-\infty) = -5-\pi+4\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -5-\pi-2\pi = -5-3\pi, \\
\lim_{x\to-1^+} g(x) &= \lim_{x\to-1^+}\Big(\overbrace{4x - x^2 - \pi}^{\to -4-1-\pi} + 4\arctan\overbrace{\frac{1-x}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}}}^{\to 2}\Big) = \\
&= -5 - \pi + 4\arctan(+\infty) = -5-\pi+4\cdot\frac{\pi}{2} = -5-\pi+2\pi = -5+\pi.
\end{aligned}$$

I limiti da sinistra e da destra nel punto -1 sono finiti ma diversi. Quindi c'è una discontinuità di salto.

b. Non ci sono asintoti verticali. Vediamo se ce ne sono di obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\Bigg(\overbrace{4 - x - \frac{\pi}{x}}^{\to\mp\infty} + \underbrace{\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0}\cdot\overbrace{\arctan\underbrace{\Big(\frac{1-x}{x+1}\Big)}_{\to -1}}^{\to\arctan(-1)=-\pi/4}}_{\to 0\cdot(-\pi/4)=0}\Bigg) = \mp\infty.$$

Non ce ne sono.

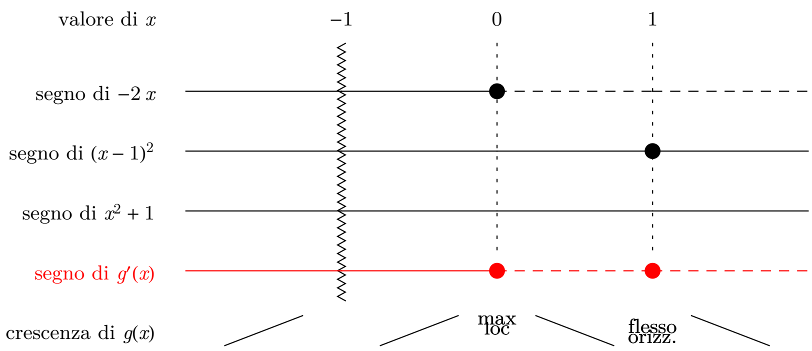
c. Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= D\Big(4x - x^2 - \pi + 4\arctan\frac{1-x}{x+1}\Big) = 4 - 2x + 4\frac{1}{1+(\frac{1-x}{x+1})^2}\cdot D\Big(\frac{1-x}{x+1}\Big) = \\
&= 4 - 2x + 4\frac{1}{1+(\frac{1-x}{x+1})^2}\cdot\frac{-(x+1)-(1-x)}{(x+1)^2} = \\
&= 4 - 2x + 4\frac{1}{1+(\frac{1-x}{x+1})^2}\cdot\frac{-2}{(x+1)^2} = \\
&= 4 - 2x - 8\frac{1}{(x+1)^2 + (\frac{1-x}{x+1})^2(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Ora c'è una sottigliezza: la semplificazione $(\frac{1-x}{x+1})^2(x+1)^2 = (1-x)^2$, che viene spontanea, strettamente parlando è valida solo quando $x+1 \neq 0$, mentre per $x=-1$ l'uguaglianza $(\frac{1-x}{x+1})^2(x+1)^2 = (1-x)^2$ ha il membro sinistro che non ha senso e il destro ha senso. Quindi la semplificazione è corretta soltanto per $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 4 - 2x - 8\frac{1}{(x+1)^2 + (\frac{1-x}{x+1})^2(x+1)^2} = 4 - 2x - 8\frac{1}{(x+1)^2+(1-x)^2} = \\
&= 4 - 2x - 8\frac{1}{x^2+2x+1+1-2x+x^2} = 4 - 2x - 8\frac{1}{2x^2+2} = 4 - 2x - \frac{4}{x^2+1} = \\
&= 2\frac{(2-x)(x^2+1)-2}{x^2+1} = 2\frac{2x^2+2-x^3-x-2}{x^2+1} = 2\frac{-x^3+2x^2-x}{x^2+1} = \frac{2x(-x^2+2x-1)}{x^2+1} = \\
&= \frac{-2x(x-1)^2}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Il caso $x = -1$ va trattato a parte: in quel punto la funzione non esiste, quindi non ci si pone nemmeno il problema se è derivabile. La formula finale che abbiamo trovato per $g'(x)$ ha tuttavia senso anche per $x = -1$: questo fatto poco comune può indurre in errore. Vedremo più tardi un'interpretazione. Lo studio del segno della derivata è nello schema seguente:



La g è strettamente crescente separatamente sui due intervalli $]-\infty, -1[$ e $]-1, 0]$, separati dal punto di non esistenza -1. Ci domandiamo se è strettamente crescente anche sull'unione dei due intervalli. La risposta è sì, perché il limite per $x \to -1^-$ è $-5-3\pi$, che è minore del limite per $x \to -1^+$, che è $-5-\pi$. In termini visivi, il tratto di grafico su $]-1, 0]$ è tutto a quota più alta del tratto su $]-\infty, -1[$.

d. Calcoliamo la derivata seconda per $x \neq -1$:

$$g''(x) = D\Big(4 - 2x - \frac{4}{x^2+1}\Big) = D\Big(4 - 2x - 4(x^2+1)^{-1}\Big) = -2 - 4(-1)(x^2+1)^{-2}2x =$$

$$= -2 + \frac{8x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{-(x^2+1)^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{-x^4 - 2x^2 - 1 + 4x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{-x^4 - 2x^2 + 4x - 1}{(x^2+1)^2}.$$

Il numeratore della formula di $g''(x)$ è un polinomio di quarto grado, però una radice è facile da trovare. Per esempio dallo studio del segno di $g'(x)$ risultava che $x = 1$ era punto di flesso orizzontale, per cui deve annullare la derivata seconda. Scomponiamo usando la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & -1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\
1 & & -1 & -1 & -3 & 1 \\
\hline
 & -1 & -1 & -3 & 1 & 0
\end{array}$$

Quindi si può scomporre:

$$g''(x) = 2\frac{-x^4 - 2x^2 + 4x - 1}{(x^2+1)^2} = 2\frac{(x-1)(-x^3 - x^2 - 3x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

Per $x = -1$ la $g(x)$ non esiste, per cui la derivata seconda non ha senso.

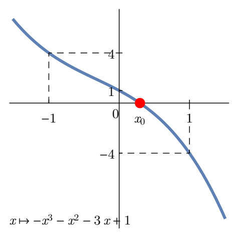
e. Per $x = 0$ la funzione vale zero:

$$g(0) = 4 \cdot 0 - 0^2 - \pi + 4\arctan\frac{1-0}{0+1} = -\pi + 4\arctan 1 = -\pi + 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 0.$$

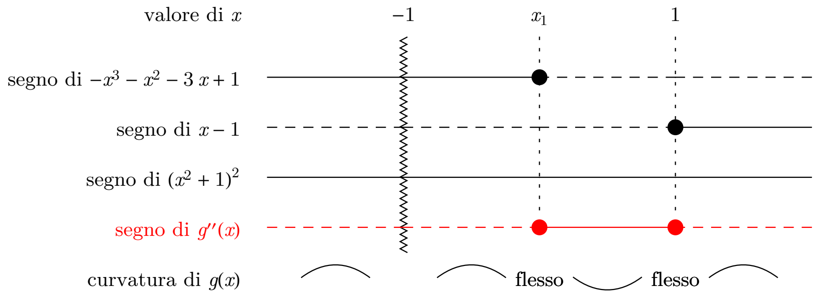
Dobbiamo stabilire se g si annulla in altri punti, e per questo ci aiutiamo con la monotonia. Su $[0, +\infty[$ la g è strettamente decrescente, e quindi $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0$. Quindi non ci sono punti $x > 0$ in cui $g(x) = 0$. Su $]-\infty, -1[\cup]-1, 0] \cup$ la g è strettamente crescente, e quindi $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0$. Quindi non ci sono punti $x \neq 0$ in cui $g(x) = 0$.

Passando alla derivata seconda, studiamo il fattore $-x^3 - x^2 - 3x + 1$ al numeratore. Questo è un polinomio di grado dispari, per cui ha almeno una radice reale. La derivata è $D(-x^3 - x^2 - 3x + 1) = -3x^2 - 2x - 3$, che ha discriminante (ridotto) $1^2 - 3 \cdot 3 < 0$. Dato che la derivata è sempre < 0, il polinomio $-x^3 - x^2 - 3x + 1$ è una funzione strettamente decrescente. Deduciamo che $-x^3 - x^2 - 3x + 1$ ha una sola radice reale. Cerchiamo di localizzare tale radice rispetto agli altri punti notevoli della funzione:

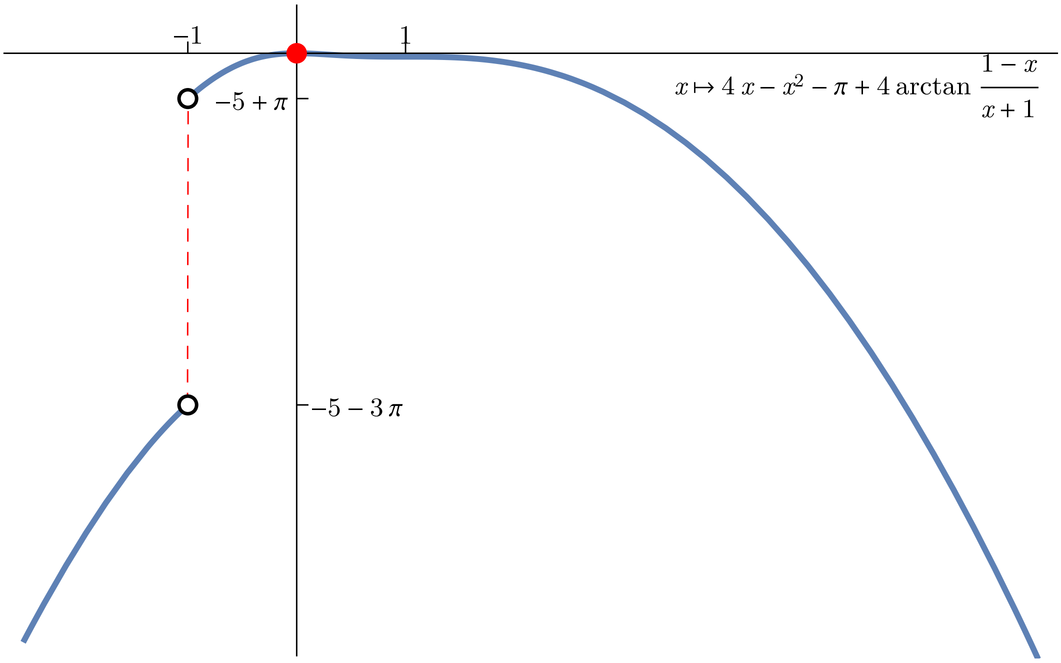
x	$-x^3 - x^2 - 3x + 1$
-1	4
0	1
1	-4

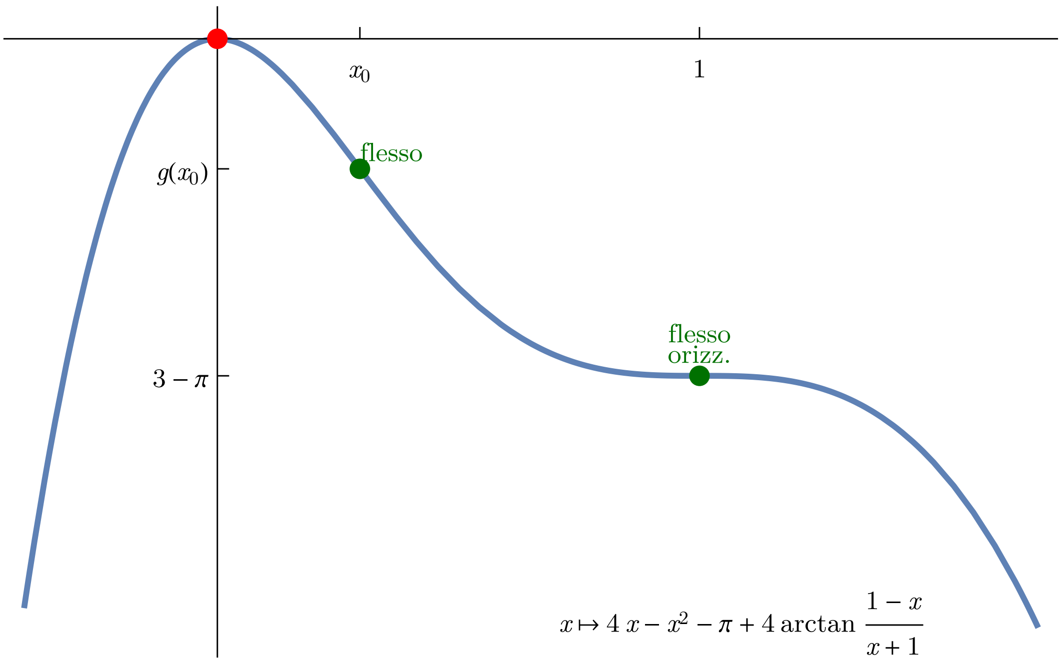


Deduciamo che la radice di $-x^3 - x^2 - 3x + 1$, che chiameremo x_0, è compresa fra 0 e 1. Lo studio del segno di $g''(x)$ è nello schema seguente.



f. Un grafico di g, con un ingrandimento della zona attorno all'intervallo $[0, 1]$, sono nelle figure seguenti:





4. Le funzioni $10^{x/2}, e^{x+3}, \sqrt{x^2+1}, x/\log x$ tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$. La funzione $\log(1/x)$ tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$. Le rimanenti tre funzioni $2^{2-x}, \operatorname{sen}(1/x), 1/\sqrt{x}$ tendono a 0 (cioè sono infinitesime) per $x \to +\infty$. Cominciamo a confrontare i primi due infinitesimi fra loro:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{2-x}}{\operatorname{sen}(1/x)} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{-x}}{1/x} \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} \cdot 1 = 0.$$

Quindi $2^{2-x} = o(\operatorname{sen}(1/x))$ per $x \to +\infty$. Confrontiamo il secondo e il terzo infinitesimo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Quindi $\operatorname{sen}(1/x) = o(1/\sqrt{x})$ per $x \to +\infty$. Passiamo agli infiniti, cominciando dai due esponenziali:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10^{x/2}}{e^{x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{10}^x)}{e^3 e^x} = e^{-3} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{10}}{e}\right)^x = +\infty,$$

in quanto $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3 > e$. Quindi $e^{x+3} = o(10^{x/2})$ per $x \to +\infty$. Fra i restanti tre infiniti cominciamo confrontando $\sqrt{x^2+1}$ con $x/\log x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x/\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x/\log x} \cdot \overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}^{\to 1} = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty,$$

Quindi $x/\log x = o(\sqrt{x^2+1})$ per $x \to +\infty$. Confrontiamo il più piccolo dei due $x/\log x$ con l'infino restante $\log(1/x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x/\log x}{\log(1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x/\log x}{-\log x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\log x)^2} = -\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)^2 = -\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2\log\sqrt{x}}\right)^2 =$$
$$= -\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{2\log t}\right)^2 = -\infty,$$

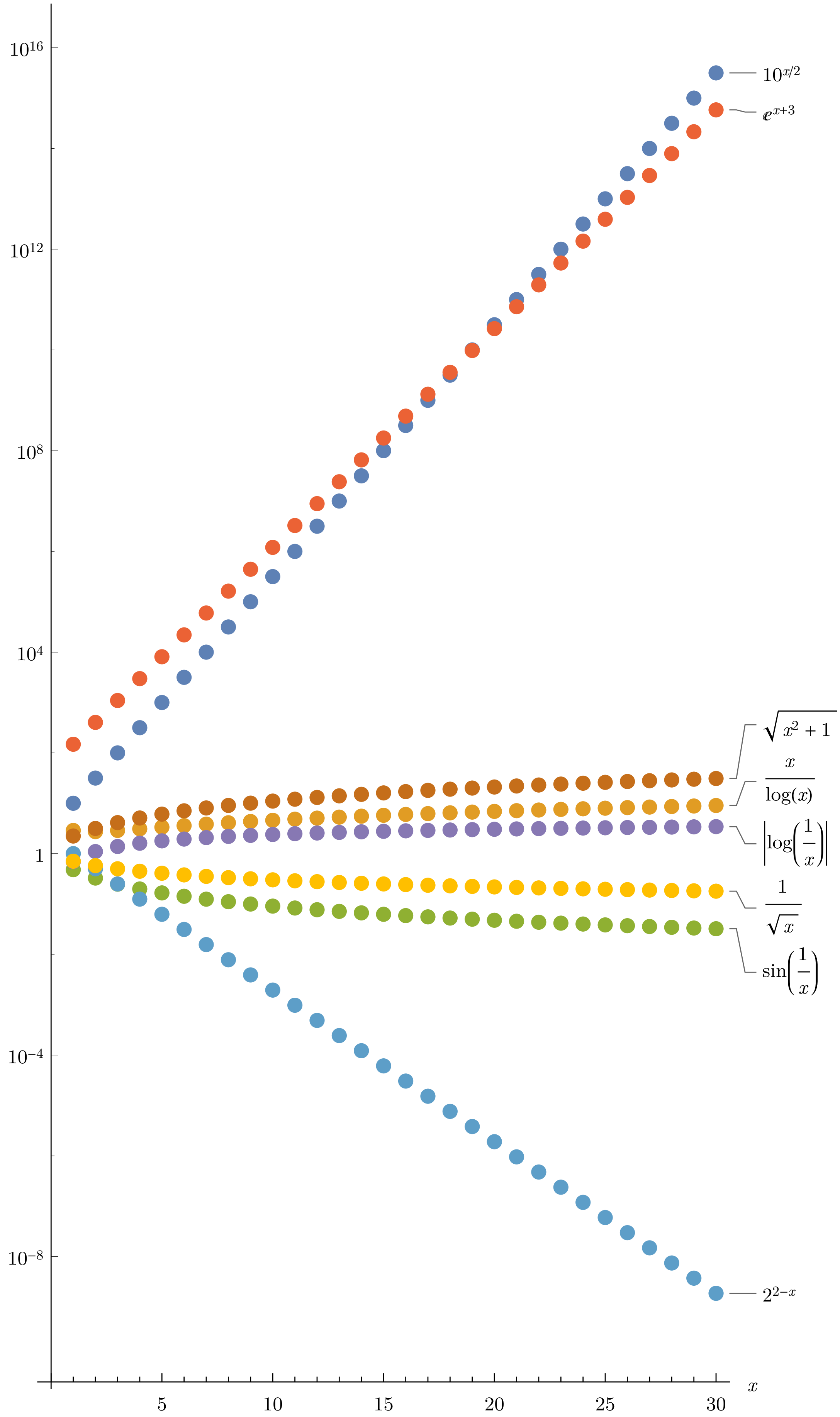
Quindi $\log(1/x) = o(x/\log x)$ per $x \to +\infty$. È ovvio che gli infinitesimi sono "o piccolo" degli infiniti. L'unico anello mancante è quello fra il più piccolo degli esponenziali crescenti e il più grande degli altri infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{\sqrt{x^2+1}} = e^3 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty.$$

Quindi $\sqrt{x^2+1} = o(e^{x+3})$ per $x \to +\infty$. Tirando le fila, nella sequenza

$$2^{2-x}, \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \log\frac{1}{x}, \quad \frac{x}{\log x}, \quad \sqrt{x^2+1}, \quad e^{x+3}, \quad 10^{x/2}$$

le funzioni che precedono sono sempre "o piccolo" di quelle che seguono. L'ordine risalta bene nel grafico in scala logaritmica, in cui abbiamo preso il valore assoluto di $\log(1/x)$ (se non non se ne poteva prendere a sua volta il logaritmo). Notare il sorpasso di $10^{x/2}$ ai danni di e^{x+3}.


10^{16}
10^{12}
10^{8}
10^{4}
1
10^{-4}
10^{-8}
5
10
15
20
25
30
x
$10^{x/2}$
e^{x+3}
$\sqrt{x^2+1}$
$\frac{x}{\log(x)}$
$\left|\log\left(\frac{1}{x}\right)\right|$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2^{2-x}

5.a. La funzione razionale $(3x^3 - x)/(x^2 + 4x + 5)$ ha il numeratore di grado maggiore del denominatore. Facciamo la divisione di polinomi:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+3\,x^3 & & -x & & +x^2 & +4\,x & +5 \\
\cline{5-7}
 & & & & & +3\,x & -12 \\
-3\,x^3 & -12\,x^2 & -15\,x & & & & \\
\cline{1-4}
 & -12\,x^2 & -16\,x & & & & \\
 & +12\,x^2 & +48\,x & +60 & & & \\
\cline{1-4}
 & & +32\,x & +60 & & &
\end{array}
$$

Quindi abbiamo la decomposizione

$$\frac{3x^3 - x}{x^2 + 4x + 5} = 3x - 12 + \frac{32x + 60}{x^2 + 4x + 5}.$$

Il denominatore ha discriminante $\Delta/4 = 2^2 - 5 \cdot 1 = -1 < 0$. Riscriviamo il numeratore come un multiplo del denominatore più una costante:

$$32x + 60 = 16(2x + 4 - 4) + 60 = 16(2x + 4) - 16 \cdot 4 + 60 = 16D(x^2 + 4x + 5) - 4.$$

Quindi

$$\int \frac{3x^3 - x}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \Big(3x - 12 + \frac{16D(x^2 + 4x + 5) - 4}{x^2 + 4x + 5}\Big) dx =$$
$$= \frac{3}{2}x^2 - 12x + 16 \log|x^2 + 4x + 5| - 4 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

Mettiamo in evidenza un quadrato perfetto al denominatore dell'integrale rimasto:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 4 + 1} dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} D(x + 2)\, dx = \arctan(x + 2).$$

Concludendo, una primitiva della funzione data è

$$\frac{3}{2}x^2 - 12x + 16 \log|x^2 + 4x + 5| - 4 \arctan(x + 2).$$

Poiché la funzione di partenza è definita su tutto $\mathbb{R}$, che è un intervallo, ogni altra primitiva si può ottenere aggiungendo una costante.

b. La funzione

$$\frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} - \frac{1 + \tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

può essere riportata alla differenza delle derivate di due funzioni composte:

$$
\begin{aligned}
e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} - \big(1 + \tan^2(\operatorname{arcsen} x)\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} &= \\
&= e^{\arctan x} \cdot D(\arctan x) - \big(1 + \tan^2(\operatorname{arcsen} x)\big) \cdot D(\operatorname{arcsen} x) = \\
&= \big(\exp g(x)\big) g'(x) - \big(1 + \tan^2(h(x))\big) \cdot h'(x) = \\
&= \big(\exp' g(x)\big) g'(x) - \big(\tan' h(x)\big) h'(x) = \\
&= D(\exp g(x)) - D(\tan h(x)) = \\
&= D\big(\exp g(x) - \tan h(x)\big)
\end{aligned}
$$

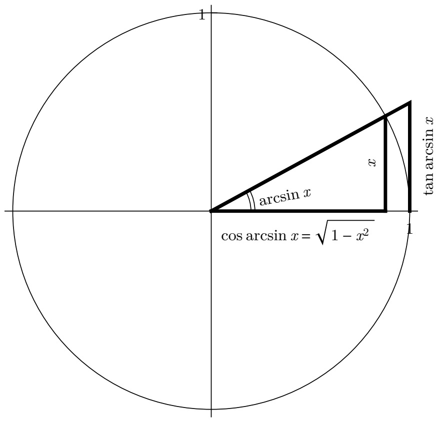
Quindi

$$\int \Big(\frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} - \frac{1 + \tan^2(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1 - x^2}}\Big) dx = e^{\arctan x} - \tan(\operatorname{arcsen} x)\,.$$

Un sistema automatico di calcolo di integrali potrebbe dare la primitiva in una forma diversa:

$$e^{\arctan x} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In realtà le due forme sono equivalenti, perché $\tan(\operatorname{arcsen} x) \equiv x/\sqrt{1-x^2}$, come ci si può convincere per via trigonometrica. Analogamente si poteva riscrivere anche la funzione iniziale.



c. Nella funzione

$$(1-x)e^{x^2-2x}$$

il fattore $1-x$ assomiglia alla derivata dell'esponente x^2-2x:

$$\begin{aligned}\int e^{x^2-2x}(1-x)dx &= \int e^{x^2-2x} D\Big(x-\frac{x^2}{2}\Big)dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2-2x} D\Big(2x-x^2\Big)dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int e^{x^2-2x} D\Big(x^2-2x\Big)dx = -\frac{1}{2}\int e^{f(x)}f'(x)dx = -\frac{1}{2}e^{f(x)} = -\frac{1}{2}e^{x^2-2x}.\end{aligned}$$

d. Per calcolare una primitiva di $x\operatorname{sen}(\log x)$ proviamo per parti due volte:

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{sen}(\log x)dx &= \int D(x^2/2)\operatorname{sen}(\log x)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \int \frac{x^2}{2}D\big(\operatorname{sen}(\log x)\big)dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \int \frac{x^2}{2}\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{1}{2}\int x\cos(\log x)dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{1}{2}\int D(x^2/2)\cos(\log x)dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2}\cos(\log x) - \int\frac{x^2}{2}D\big(\cos(\log x)\big)dx\Big) = \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{x^2}{4}\cos(\log x) + \frac{1}{4}\int x^2\big(-\operatorname{sen}(\log x)\big)\frac{1}{x}dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{x^2}{4}\cos(\log x) - \frac{1}{4}\int x\operatorname{sen}(\log x)dx\end{aligned}$$

L'integrale nell'ultimo membro è un multiplo di quello iniziale. Portandolo al primo membro otteniamo

$$\frac{5}{4}\int x\operatorname{sen}(\log x)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{x^2}{4}\cos(\log x),$$

da cui infine

$$\int x\operatorname{sen}(\log x)dx = \frac{2x^2}{5}\operatorname{sen}(\log x) - \frac{x^2}{5}\cos(\log x) = \frac{x^2}{5}\big(2\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)\big).$$

5. Nell'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$$

facciamo la sostituzione suggerita $x = -t^2/(2t+2)$. Il differenziale dx diventa

$$dx = D\Big(-\frac{t^2}{2t+2}\Big)dt = -\frac{2t(2t+2) - t^2 \cdot 2}{(2t+2)^2}dt = -\frac{2t^2+4t}{(2t+2)^2}dt = -\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}dt.$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\big(-\frac{t^2}{2t+2}\big)^2 - 2\big(-\frac{t^2}{2t+2}\big)}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{t^4}{(2t+2)^2} + \frac{2t^2}{2t+2}}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{t^4+2t^2(2t+2)}{(2t+2)^2}}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{t^4+4t^3+4t^2}{(2t+2)^2}}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dy = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2(t^2+4t+4)}{(2t+2)^2}}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \int \frac{1}{\pm\frac{t(t+2)}{(2t+2)}} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \\
&= \pm \int \frac{2(t+1)}{t(t+2)} \cdot \Big(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\Big)dt = \pm \int \Big(-\frac{1}{t+1}\Big)dt = \mp \int \frac{1}{t+1}dt = \\
&= \mp \log|t+1|.
\end{aligned}$$

Dobbiamo esprimere t in funzione di x:

$$x = -\frac{t^2}{2t+2} \iff (2t+2)x = -t^2 \iff t^2 + 2xt + 2x = 0 \iff t = -x \pm \sqrt{x^2-2x}.$$

Risostituendo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \mp \log\Big|-x \pm \sqrt{x^2-2x} + 1\Big|.$$

Quali combinazioni di segni daranno un risultato corretto? Proviamo a scegliere in entrambi i posti i segni $+$ e a derivare:

$$\begin{aligned}
D\Big(\log\Big|-x + \sqrt{x^2-2x} + 1\Big|\Big) &= \frac{1}{-x + \sqrt{x^2-2x} + 1} \cdot \Big(-1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\Big) = \\
&= \frac{1}{-x + \sqrt{x^2-2x} + 1} \cdot \frac{-\sqrt{x^2-2x} + x - 1}{\sqrt{x^2-2x}} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}.
\end{aligned}$$

Viene giusto l'opposto di quello che doveva venire. Quindi una primitiva corretta è col segno $-$ davanti e $+$ dentro:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = -\log\Big|-x + \sqrt{x^2-2x} + 1\Big|.$$

Viene giusto anche prendendo $+$ davanti e $-$ dentro:

$$\begin{aligned}
D\Big(\log\Big|-x - \sqrt{x^2-2x} + 1\Big|\Big) &= \frac{1}{-x - \sqrt{x^2-2x} + 1} \cdot \Big(-1 - \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\Big) = \\
&= \frac{1}{-x - \sqrt{x^2-2x} + 1} \cdot \frac{-\sqrt{x^2-2x} - x + 1}{\sqrt{x^2-2x}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}.
\end{aligned}$$

Quindi è pure valido il risultato

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \log\Big|-x - \sqrt{x^2-2x} + 1\Big|.$$

Non va bene invece prendere $-$ in entrambi i posti. Le due primitive valide che abbiamo trovato differiscono per una costante? Quale?
Un altro modo per decidere i segni era di tornare al passaggio in cui si estrae la radice:

$$\sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(2t+2)^2}} = \pm\frac{t(t+2)}{2t+2},$$

dove a rigore va scelto $+$ se $t(t+2)/(2t+2) \geq 0$, e $-$ se $t(t+2)/(2t+2) < 0$. Per semplificare i conti è utile notare che dalla relazione $x = -t^2/(2t+2)$ segue che $t/(2t+2) = -x/t$. Con la scelta $t = -x+\sqrt{x^2-2x}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{t(t+2)}{2t+2} &= \frac{t}{2t+2}(t+2) = -\frac{x}{t}(t+2) = -\frac{x\big(-x+\sqrt{x^2-2x}+2\big)}{-x+\sqrt{x^2-2x}} = \\
&= -\frac{x\big(-x+\sqrt{x^2-2x}+2\big)\big(-x-\sqrt{x^2-2x}\big)}{(-x)^2-(x^2-2x)} = \\
&= -\frac{1}{2}\big(x^2+x\sqrt{x^2-2x}-x\sqrt{x^2-2x}-(x^2-2x)-2x-2\sqrt{x^2-2x}\big) = \\
&= -\sqrt{x^2-2x} \leq 0.
\end{aligned}$$

Analogamente con la scelta $t = -x-\sqrt{x^2-2x}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{t(t+2)}{2t+2} &= \frac{t}{2t+2}(t+2) = -\frac{x}{t}(t+2) = -\frac{x\big(-x-\sqrt{x^2-2x}+2\big)}{-x-\sqrt{x^2-2x}} = \\
&= -\frac{x\big(-x-\sqrt{x^2-2x}+2\big)\big(-x+\sqrt{x^2-2x}\big)}{(-x)^2-(x^2-2x)} = \\
&= -\frac{1}{2}\big(x^2-x\sqrt{x^2-2x}+x\sqrt{x^2-2x}-(x^2-2x)-2x+2\sqrt{x^2-2x}\big) = \\
&= \sqrt{x^2-2x} \geq 0.
\end{aligned}$$