Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 7 febbraio 2013

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x - 4^x + 1}{(2x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x^5 - 3x^3} - 2\sqrt{x^5 + x^2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(e^{x+1} - \sqrt{x^2 + e^{2x+2} - 3e^x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \log(xe^x + 2)}{2x - 1 - \sqrt{4x^2 - x\log x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(2x-1)^2(x - x^3) + 4x^5}{(x^4 - 2x^2)(x+1)^2 - x^5(x+2)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\log(x + e^x)} - \sqrt{x - \sqrt{x}}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{2x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{(x + 2x^4)(2x^3 - x^2 + 3)}{2(x^2 - 1)(1 + 2x + x^2)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x(e^{2x} - e^x)}}{1 - \sqrt{1 + x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 3}{x^2 + x}\right)^{2x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^{1/x} - 3}{(x^4 - 3x^2)\sqrt{1 - \cos x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x - e^{-x}\cos x}{x - 2\sqrt{x^3 + x}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x(x^2 - 3x - 2)(1 - x)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x\log(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{3x + x^2} - \sqrt{x^2 - 3x}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{8 - 3x}{7(x-2)} + \frac{6x - 1}{2(x+1)} \geq \frac{9}{14}$, (b) $\max\{2x, \min\{-2, 2x+2\}\} \geq x$, (c) $\displaystyle\sqrt{\frac{-x}{x+2}} \leq -x$.

3. Sia a_n la classica successione di Fibonacci: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Consideriamo una prima somma $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, una seconda $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$ e una terza $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1}$. Una delle tre somme vale $a_{2n+1} - 1$, un'altra vale $a_{n+2} - 1$ e la rimanente vale a_{2n+2}. Accoppiare le somme coi loro valori corretti, e dimostrare le uguaglianze per induzione.

4. Poniamo $X = \{|n|/(4n - 2|n| + 1) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $1/2$ è l'estremo superiore e $-1/5$ è il minimo di X.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 7 febbraio 2013

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-1}\right)^{3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^5+2x^3}-3\sqrt{x^5+x^2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+(x-1)^2(x-3x^3)}{(x+1)^2(2x^4+x^2)-2x^5(x+2)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log(e^x-x)}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+x^4)(2x^3-3x^5+x)}{3(1-x^2)(1+2x+x^2)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(xe^x+1)}{2x+1-\sqrt{4x^2+2x\log x}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-\sqrt{3x^3+e^{2x-2}-e^x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3-2(1+x)^{1/x}}{(x^4-x^2)\sqrt{1-\cos 2x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{1-3e^x}{(x^2+4x+3)(x^2+2x+1)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x\log(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-4}{x^2-x}\right)^{2x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\operatorname{sen}2x-x\cos x}{x-\sqrt{x^3-2x}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x(e^x-e^{-x})}}{1-\sqrt{x+1}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\log(2+x)}{x(x^2+2x-3)(x+1)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\dfrac{6x+1}{2(x-1)}-\dfrac{3x+8}{7(x+2)}\geq\dfrac{9}{14}$, (b) $\max\{x,\min\{2,-5x-3\}\}+2x\geq0$, (c) $\sqrt{\dfrac{-x}{x-3}}\leq\dfrac{2}{3}x$.

3. Sia x_n la classica successione di Fibonacci: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$. Consideriamo una prima somma $x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$, una seconda $x_0+x_2+x_4+\cdots+x_{2n}$ e una terza $x_1+x_3+x_5+\cdots+x_{2n+1}$. Una delle tre somme vale x_{2n+2}, un'altra vale $x_{n+2}-1$ e la rimanente vale $x_{2n+1}-1$. Accoppiare le somme coi loro valori corretti, e dimostrare le uguaglianze per induzione.

4. Poniamo $A=\left\{|n|/\left(4n-2|n|+1\right)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $-1/5$ è il minimo e $1/2$ è l'estremo superiore di A.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 7 febbraio 2013

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x+1}-\sqrt{e^{2x+2}-x^4+2e^x}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-\log(xe^x+1)}{2x-1-\sqrt{4x^2-2x\log x}}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log(e^x-x)}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)^2(x+2x^3)+8x^5}{x^5(x+2)-(1-x)^2(x^4-2x^2)}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^5+3x^3}-2\sqrt{x^5-3x^2}\right)$

f) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3x^4)(2x^3+x^5-4x)}{3(1-2x^2)(x^2+2x+1)}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)^{3x}$

h) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}\operatorname{sen}x-x\cos 2x}{x-\sqrt{x^3+2x}}$

i) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\log(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}}$

j) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-1}\right)^{2x}$

k) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x(e^{2x}-e^{-2x})}}{1-\sqrt{1+x}}$

l) $\lim_{x\to0}\dfrac{2-(1+x)^{1/x}}{(4x^3-x^2)\sqrt{1-\cos x}}$

m) $\lim_{x\to-1}\dfrac{2e^x-1}{(2+x-x^2)(x^2+2x+1)}$

n) $\lim_{x\to-1}\dfrac{\log(2+x)}{x(x^2-x-4)(x+1)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\dfrac{x-12}{x-2}+\dfrac{10x+11}{10(x+1)}\geq\dfrac{47}{10}$, (b) $\max\{-x,\min\{2,-3x-1\}\}\geq -2x$, (c) $\sqrt{\dfrac{-x}{x+1}}\leq -2x$

3. Sia f_n la classica successione di Fibonacci: $f_0=0$, $f_1=1$, $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$. Consideriamo una prima somma $f_0+f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n$, una seconda $f_0+f_2+f_4+\cdots+f_{2n}$ e una terza $f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n+1}$. Una delle tre somme vale $f_{2n+1}-1$, un'altra vale $f_{n+2}-1$ e la rimanente vale f_{2n+2}. Accoppiare le somme coi loro valori corretti, e dimostrare le uguaglianze per induzione.

4. Poniamo $E=\left\{|n|/\big(4n-2|n|+1\big)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $1/2$ è l'estremo superiore e $-1/5$ è il minimo di E.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 7 febbraio 2013

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(xe^x-1)}{2x+1-\sqrt{4x^2-3x\log x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-\sqrt{e^{2x-2}-x^5-2e^x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1+e^x-4^x}{(3x^2-4x+1)(1-2x+x^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+(x+1)^2(x-3x^3)}{(x+1)^2(x^4+2x^2)-x^5(x+2)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^5-x^3}-3\sqrt{x^5+2x^2}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log(x+e^x)}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3}\right)^{2x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-2(1+x)^{1/x}}{(x^3-x^2)\sqrt{1-\cos 2x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(5x-x^4)(x^3+2x^5-2x)}{2(1-3x^2)(x^2+2x+1)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x\log(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{x^2-2x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x}{2x^2+x-1}\right)^{2x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x(2x^2-x-2)(1-x)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x(e^x-e^{-2x})}}{1-\sqrt{1-x}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos x-e^{-x}\operatorname{sen}2x}{2x-\sqrt{x^3-x}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{x+12}{x+2}+\frac{10x-11}{10(x-1)}\geq\frac{47}{10}$, (b) $\max\{-2x,\min\{-1,3-4x\}\}+x\geq0$, (c) $\displaystyle\sqrt{\frac{-x}{x-1}}\leq 2x$.

3. Sia b_n la classica successione di Fibonacci: $b_0=0$, $b_1=1$, $b_{n+2}=b_n+b_{n+1}$. Consideriamo una prima somma $b_0+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$, una seconda $b_0+b_2+b_4+\cdots+b_{2n}$ e una terza $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n+1}$. Una delle tre somme vale b_{2n+2}, un'altra vale $b_{n+2}-1$ e la rimanente vale $b_{2n+1}-1$. Accoppiare le somme coi loro valori corretti, e dimostrare le uguaglianze per induzione.

4. Poniamo $S=\left\{|n|/\left(4n-2|n|+1\right)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Dimostrare che $-1/5$ è il minimo e $1/2$ è l'estremo superiore di S.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 7 febbraio 2013

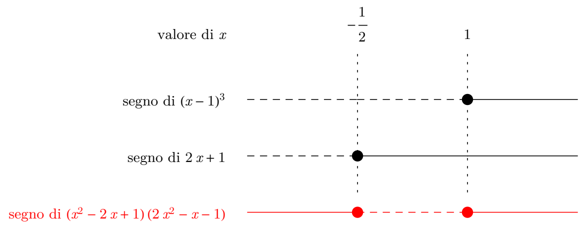
Svolgimento

Le figure che seguono ogni calcolo di limite, nonché quelle che accompagnano i **complementi** servono ad allargare l'orizzonte per il lettore, e non sono minimamente richieste nello svolgimento del compito d'esame. Gli schemi usati nella soluzione delle disequazioni sono invece parte integrante dello svolgimento; sono consigliati ma non obbligatori.

1. a. Nel limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - 4^x + 1}{(2x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1)}$$

la variabile x tende a 1. Il numeratore tende semplicemente al numero $e - 4 + 1 = e - 3 < 0$, mentre il denominatore tende a $(2 - 1 - 1)(1 - 2 + 1) = 0$. Quindi il limite è $\pm\infty$. Per stabilire se è $+\infty$ o $-\infty$ studiamo il segno del denominatore. Il polinomio $2x^2 - x - 1$ ha determinante $1 + 8 = 3^2$ e radici $\{(1 \pm 3)/4\} = \{1, -1/2\}$. L'altro fattore fattore è il quadrato perfetto $(x - 1)^2$. Il segno del denominatore si determina con questo schema:

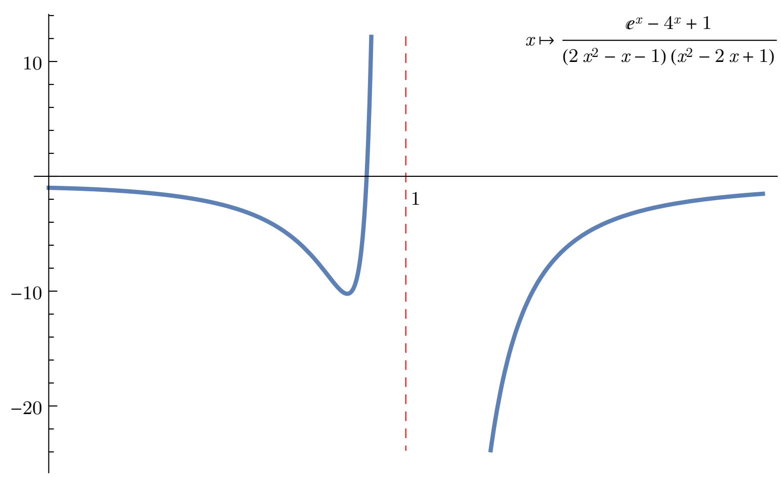


Il denominatore è negativo a sinistra di 1 e positivo a destra. Pertanto

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x - 4^x + 1}{(2x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1)} = \frac{e-3}{0^-} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - 4^x + 1}{(2x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1)} = \frac{e-3}{0^+} = -\infty.$$

Strettamente parlando il limite bilaterale assegnato in partenza non esiste, oppure è ∞ senza segno. Un modo leggermente diverso di procedere sarebbe di fattorizzare il denominatore usando le sue radici: ci si libera dei fattori che non tendono a zero, mentre di quelli che tendono a zero il segno è evidente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^\mp} \frac{e^x - 4^x + 1}{(2x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1)} &= \lim_{x\to 1^\mp} \frac{e^x - 4^x + 1}{2(x-1)(x+1/2)\cdot(x-1)^2} = \\ &= \lim_{x\to 1^\mp} \frac{\overbrace{e^x - 4^x + 1}^{e-3}}{\underbrace{2(x+1/2)}_{\to 3}} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{e-3}{3} \lim_{x\to 1^\mp} \frac{1}{\underbrace{(x-1)^3}_{0^\mp}} = \pm\infty.\end{aligned}$$



b. Il limite

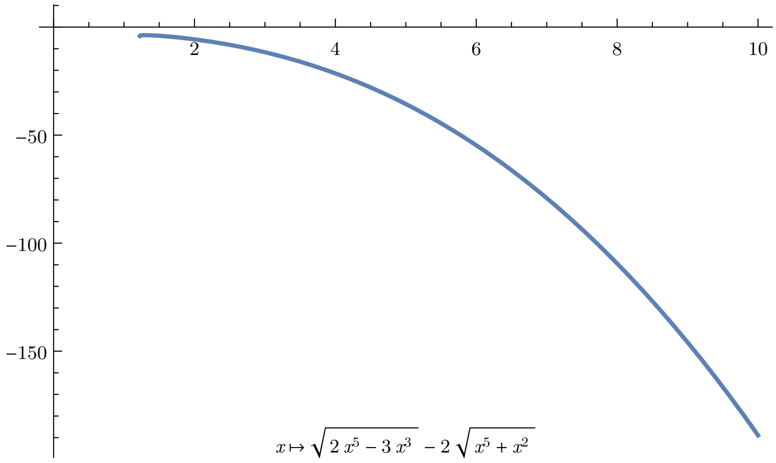
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^5-3x^3}-2\sqrt{x^5+x^2}\right)$$

si presenta nella forma $\infty-\infty$. Per capire quali sono i termini principali si può portare il fattore 2 sotto radice:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^5-3x^3}-\sqrt{4(x^5+x^2)}\right).$$

Nella prima radice il termine principale è $2x^5$, mentre nella seconda è $4x^5$, che non sono uguali. Possiamo semplicemente raccogliere le potenze x^5 e portarle a fattore comune:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^5-3x^3}-2\sqrt{x^5+x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^5(2-3x^{-2})}-2\sqrt{x^5(1+x^{-3})}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x^{5/2}\sqrt{2-3x^{-2}}-2x^{5/2}\sqrt{1+x^{-3}}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^{5/2}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\sqrt{2-3x^{-2}}-2\sqrt{1+x^{-3}}\right)}_{\to\sqrt{2}-2<0} = -\infty.\end{aligned}$$

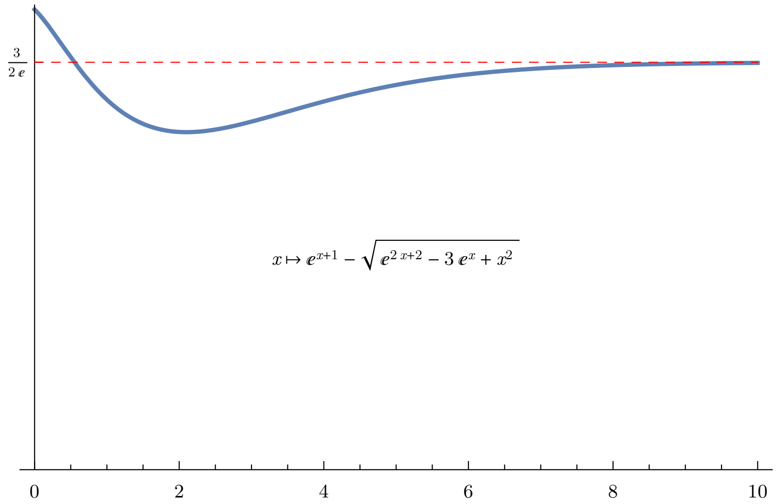


c. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x+1}-\sqrt{x^2+e^{2x+2}-3e^x}\right)$$

sotto radice abbiamo la potenza x^2 e due esponenziali: l'ultimo ha base e e il primo si può riscrivere come $e^{2x+2}=e^{2x}e^2=(e^2)^xe^2$ e quindi ha base e^2. Il termine principale sotto radice è pertanto e^{2x+2}, che trascina la radice a $+\infty$. Pertanto il limite di partenza è della forma indeterminata $+\infty-\infty$. Il primo addendo e^{x+1} si può scrivere sotto forma di una radice $e^{x+1}=\sqrt{e^{2x+2}}$, nella quale il termine principale (unico) è identico a quello dell'altra radice. Conviene quindi moltiplicare e dividere per la somma dei due termini, ottenendo al numeratore una cancellazione dei due termini principali:

$$\begin{aligned}e^{x+1}-\sqrt{x^2+e^{2x+2}-3e^x} &= \frac{(e^{x+1})^2-(x^2+e^{2x+2}-3e^x)}{e^{x+1}+\sqrt{x^2+e^{2x+2}-3e^x}} = \\ &= \frac{-x^2+3e^x}{e^{x+1}+\sqrt{e^{2x+2}(e^{-2x-2}x^2+1-3e^{-x-2})}} = \\ &= \frac{e^x(-x^2e^{-x}+3)}{e^{x+1}+e^{x+1}\sqrt{e^{-2x-2}x^2+1-3e^{-x-2}}} = \\ &= \frac{e^x}{e^{x+1}}\cdot\frac{-x^2e^{-x}+3}{1+\sqrt{e^{-2x-2}x^2+1-3e^{-x-2}}} = \\ &= \frac{1}{e}\cdot\frac{\overbrace{-x^2e^{-x}+3}^{\to3}}{\underbrace{1+\sqrt{e^{-2x-2}x^2+1-3e^{-x-2}}}_{\to2}} \longrightarrow \frac{1}{e}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3e}{2}.\end{aligned}$$



d. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\log(xe^x+2)}{2x-1-\sqrt{4x^2-x\log x}}\,.$$

raccogliamo i termini principali dentro al logaritmo, e scriviamo $2x-1$ (che è >0 per $x\to+\infty$) come radice, per confrontarlo più facilmente:

$$\frac{x-\log(xe^x+2)}{2x-1-\sqrt{4x^2-x\log x}} = \frac{x-\log\big(xe^x(1+2x^{-1}e^{-x})\big)}{\sqrt{(2x-1)^2}-\sqrt{4x^2-x\log x}} = \frac{x-\log x-\log e^x-\log(1+2x^{-1}e^{-x})}{\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2-x\log x}} =$$

$$= \frac{x-\log x-x-\log(1+2x^{-1}e^{-x})}{\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2-x\log x}} = \frac{-\log x-\overbrace{\log(1+2x^{-1}e^{-x})}^{\to\log 1=0}}{\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2-x\log x}} =$$

$$= \frac{-\log x}{\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2-x\log x}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\log(1+2x^{-1}e^{-x})}{\log x}\right)}_{\to 1-0=1}.$$

L'ultimo fattore che tende a 1 si può eliminare dal limite. Al denominatore restante abbiamo una forma $+\infty-\infty$ in cui i termini principali dentro le due radici sono identici. Quindi conviene moltiplicare e dividere per la somma delle radici, in modo che i termini principali si elidano da una parte e si sommino dall'altra:

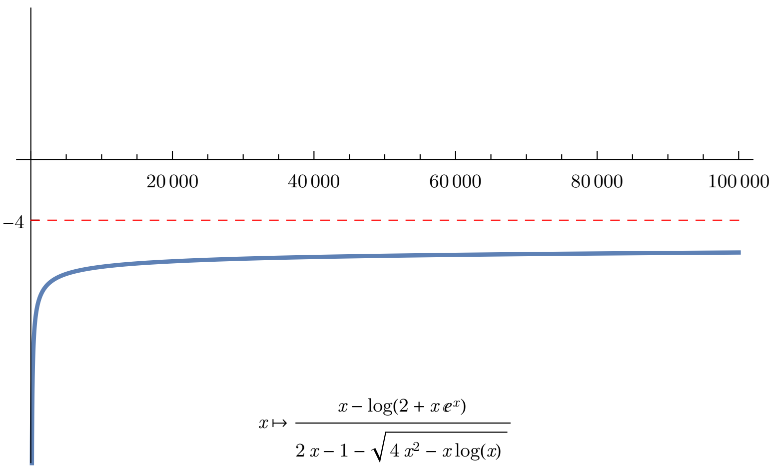
$$\frac{-\log x}{2x-1-\sqrt{4x^2-x\log x}} = \frac{-\log x}{4x^2-4x+1-(4x^2-x\log x)}\cdot\left(\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2-x\log x}\right)$$

$$= \frac{-\log x}{-4x+1+x\log x}\cdot\left(\sqrt{x^2(4-4x^{-1}+x^{-2})}+\sqrt{x^2(4-x^{-1}\log x)}\right) =$$

$$= \frac{-\log x}{(x\log x)\left(-\frac{4}{\log x}+\frac{1}{x\log x}+1\right)}\cdot x\left(\sqrt{4-4x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{4-x^{-1}\log x}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\underbrace{\left(-\frac{4}{\log x}+\frac{1}{x\log x}+1\right)}_{\to 1}}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{4-4x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{4-x^{-1}\log x}\right)}_{\to 2+2=4} \longrightarrow -4.$$

Dalla figura seguente si vede che al convergenza al limite -4 è lenta.



e. Il limite è del rapporto di due polinomi:

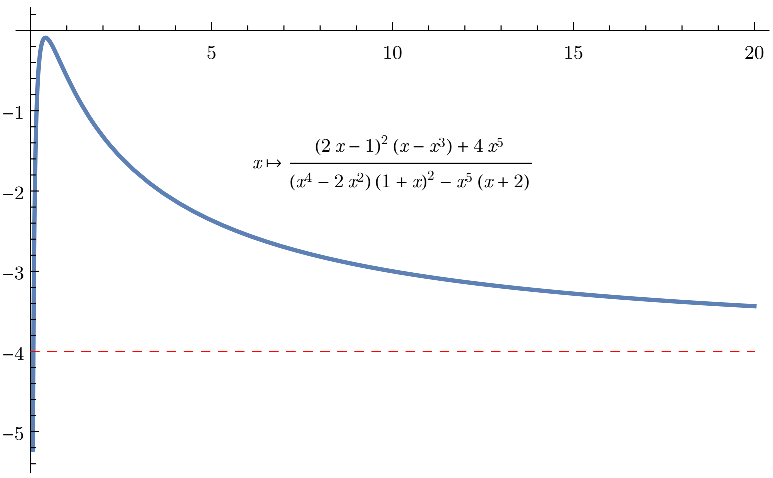
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)^2(x-x^3)+4x^5}{(x^4-2x^2)(x+1)^2-x^5(x+2)}.$$

Proviamo a raccogliere i termini principali nei prodotti:

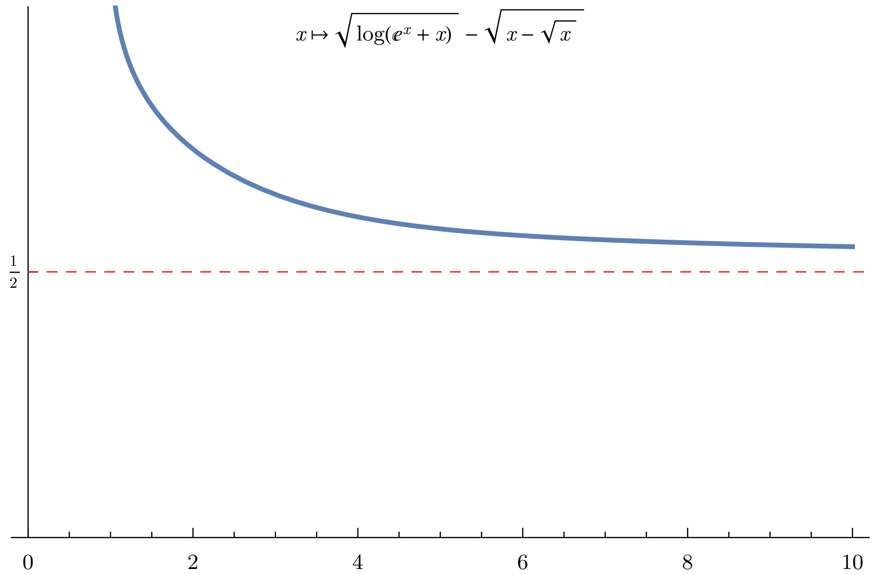
$$\begin{aligned}
\frac{(2x-1)^2(x-x^3)+4x^5}{(x^4-2x^2)(x+1)^2-x^5(x+2)} &= \frac{\big(x(2-x^{-1})\big)^2 x^3(x^{-2}-1)+4x^5}{x^4(1-2x^{-2})\big(x(1+x^{-1})\big)^2-x^6(1+2x^{-1})} = \\
&= \frac{x^5(2-x^{-1})^2(x^{-2}-1)+4x^5}{x^6(1-2x^{-2})(1+x^{-1})^2-x^6(1+2x^{-1})} = \\
&= \frac{\overbrace{(2-x^{-1})^2(x^{-2}-1)+4}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\big((1-2x^{-2})(1+x^{-1})^2-(1+2x^{-1})\big)}_{\to 0}}
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una forma molto indeterminata $0/(\infty\cdot 0)$. Cambiamo tattica ed espandiamo i prodotti:

$$\begin{aligned}
\frac{(2x-1)^2(x-x^3)+4x^5}{(x^4-2x^2)(x+1)^2-x^5(x+2)} &= \frac{(4x^2-4x+1)(x-x^3)+4x^5}{(x^4-2x^2)(x^2+2x+1)-x^6-2x^5} = \\
&= \frac{4x^3-4x^5-4x^2+4x^4+x-x^3+4x^5}{x^6+2x^5+x^4-2x^4-4x^3-2x^2-x^6-2x^5} = \\
&= \frac{4x^4+3x^3-4x^2+x}{-x^4-4x^3-2x^2} = \\
&= \frac{4+3x^{-1}-4x^{-2}+x^{-3}}{-1-4x^{-1}-2x^{-2}} \longrightarrow \frac{4}{-1} = -4.
\end{aligned}$$



f. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\log(x+e^x)}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$$
si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Dentro il logaritmo c'è un esponenziale, che si può estrarre: $\log(x+e^x)=log(e^x(xe^{-x}+1))=\log e^x+\log(xe^{-x}+1)=x+\log(xe^{-x}+1)$. Quindi il termine principale dentro entrambe le radici è x. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici, in modo che i termini principali in un posto si cancellino e nell'altro si sommino:
$$\sqrt{\log(x+e^x)}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{x+\log(xe^{-x}+1)}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{x+\log(xe^{-x}+1)-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\log(xe^{-x}+1)}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}+\log(xe^{-x}+1)}{\sqrt{x}\big(\sqrt{1+x^{-1}\log(xe^{-x}+1)}+\sqrt{1-x^{-1/2}}\big)}=$$
$$=\frac{1+x^{-1/2}\log(xe^{-x}+1)}{\sqrt{1+x^{-1}\log(xe^{-x}+1)}+\sqrt{1-x^{-1/2}}}\longrightarrow\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}.$$



g. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)^{2x}$$
si presenta nella forma indeterminata $(+\infty-\infty)^{+\infty}$. Dentro le due radici il termine principale è x^2, lo stesso in entrambe. Lavorando per ora soltanto nella base, moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici:
$$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{(x^2+2x+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$
$$=\frac{x(2+2x^{-1})}{x\big(\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}\big)}=$$
$$=\frac{2+2x^{-1}}{\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}}\longrightarrow\frac{2+0}{1+1}=1.$$
Dunque il limite di partenza è della forma indeterminata $1^{+\infty}$. Ci si può riportare a una forma indeterminata più familiare scrivendo la base nella forma $1+f(x)$ con $f(x)\to0$
$$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}=1+\frac{2+2x^{-1}}{\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}}-1=$$
$$=1+\underbrace{\frac{2+2x^{-1}-\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}-\sqrt{1-x^{-2}}}{\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}}}_{=f(x)}=$$
$$=1+f(x)$$

e poi portando la variabilità all'esponente col logaritmo:

$$\Big(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big)^{2x} = \big(1+f(x)\big)^{2x} = \exp\Big(2x\log\big(1+f(x)\big)\Big).$$

Si può sfruttare il limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\Big(2x\log\big(1+f(x)\big)\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} 2xf(x)\cdot\frac{\log\big(1+f(x)\big)}{f(x)}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} 2xf(x)\Big).$$

Dentro all'esponenziale l'ultimo limite è del tipo indeterminato $\infty\cdot 0$. Possiamo lavorarlo così:

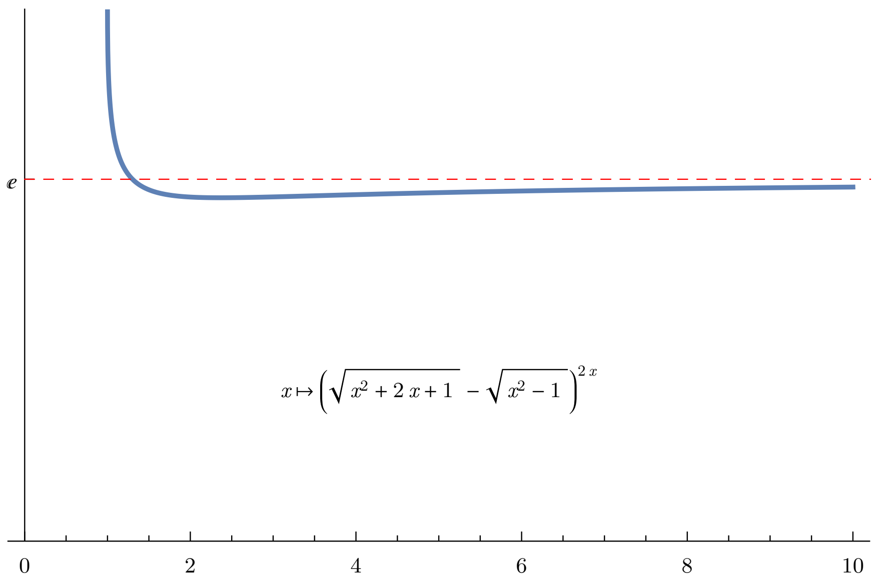
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\frac{2+2x^{-1}-\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}-\sqrt{1-x^{-2}}}{\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2\cdot\frac{2x+2-\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-2}}}}_{\to 2}\cdot\Big(2x+2-\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\Big(2x+2-\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big) = \\
&= 2+\lim_{x\to+\infty}\Big(2x-\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big).
\end{aligned}$$

Di nuovo una forma indeterminata, questa volta del tipo $+\infty-\infty-\infty$. Possiamo riscriverla come somma di due termini del tipo $x-\sqrt{}$:

$$\begin{aligned}
2x-\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1} &= \big(x-\sqrt{x^2+2x+1}\big)+\big(x-\sqrt{x^2-1}\big) = \\
&= \frac{x^2-(x^2+2x+1)}{x+\sqrt{x^2+2x+1}}+\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \\
&= \frac{-2x-1}{x\big(1+\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}\big)}+\frac{1}{x\big(1+\sqrt{1-x^{-2}}\big)} = \\
&= \frac{-2-x^{-1}}{1+\sqrt{1+2x^{-1}+x^{-2}}}+\frac{1}{x\big(1+\sqrt{1-x^{-2}}\big)} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \frac{-2-0}{1+1}+\frac{1}{\infty\cdot(1+1)} = -1.
\end{aligned}$$

Torniamo infine alla forma con l'esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big)^{2x} = \exp\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = \exp\Big(2+(-1)\Big) = \exp 1 = e^1 = e.$$

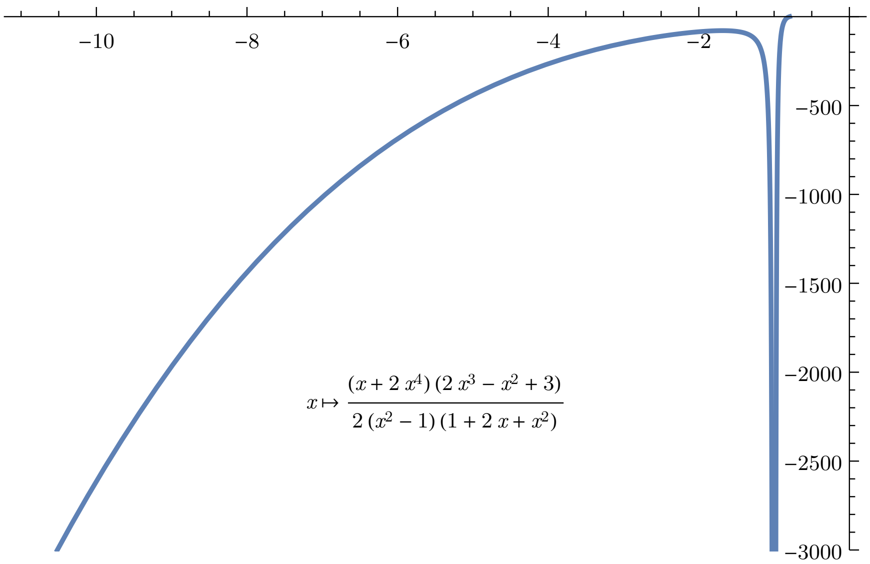


h. Nel limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+2x^4)(2x^3-x^2+3)}{2(x^2-1)(1+2x+x^2)}$$

sia il numeratore che il denominatore sono prodotti di polinomi. Il numeratore ha grado $4+3=7$, il denominatore ha grado $2+2=4$. Quindi il limite è infinito. Per trovare il segno si possono per esempio raccogliere i termini principali:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+2x^4)(2x^3-x^2+3)}{2(x^2-1)(1+2x+x^2)} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(x^{-3}+2)\cdot x^3(2-x^{-1}+3x^{-3})}{2x^2(1-x^{-2})\cdot x^2(x^{-2}+2x^{-1}+1)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{x^4}\cdot\frac{(x^{-3}+2)(2-x^{-1}+3x^{-3})}{(1-x^{-2})(x^{-2}+2x^{-1}+1)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 1} = (-\infty)^3 = -\infty.
\end{aligned}$$



i. La funzione del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{1-\sqrt{1+x}}$$

è della forma indeterminata $0/0$. Possiamo semplificare moltiplicando e dividendo per $1+\sqrt{1+x}$, che tende a 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{1-\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{1-(1+x)}\cdot\underbrace{\left(1+\sqrt{1+x}\right)}_{\to 2} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{x}$$

Alla differenza dei due esponenziali si può aggiungere e togliere 1, in modo da far apparire il limite notevole $(e^t-t)/t \to 1$ per $t\to 0$:

$$e^{2x}-e^x = (e^{2x}-1)-(e^x-1) = 2x\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} - x\cdot\frac{e^x-1}{x} = x\underbrace{\left(2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}\right)}_{\to 2-1=1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x\cdot(e^{2x}-e^x)}}{x} &= \frac{\sqrt{x\cdot x\left(2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}\right)}}{x} = \\
&= \frac{\sqrt{x^2}}{x}\cdot\underbrace{\sqrt{2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}}}_{\to 1}
\end{aligned}$$

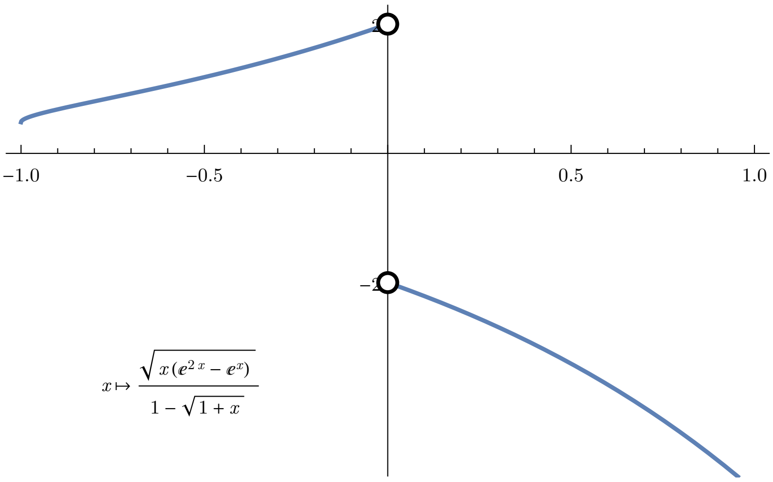
Tornando al limite di partenza:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{1-\sqrt{1+x}} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$$

Poiché $\sqrt{x^2} = |x|$, bisogna distinguere i limiti da sinistra e da destra:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{1-\sqrt{1+x}} = -2 \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = -2\cdot 1 = -2,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x(e^{2x}-e^x)}}{1-\sqrt{1+x}} = -2 \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -2\cdot(-1) = 2.$$

Il limite bilaterale di partenza non esiste. La funzione ha un salto.



j. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+x}\right)^{2x}$$

è nella forma indeterminata $1^{+\infty}$. È consigliabile riscrivere la base nella forma $1+f(x)$ con $f(x)\to 0$, aggiungendo e togliendo 1:

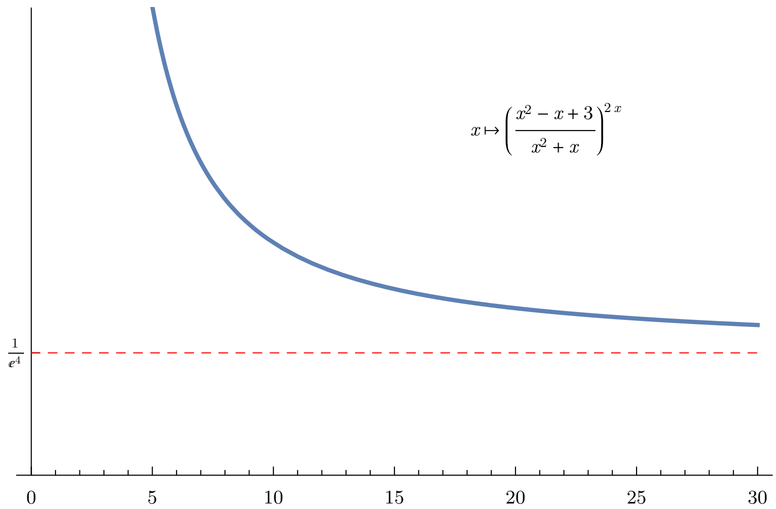
$$1+\frac{x^2-x+3}{x^2+x}-1 = 1+\frac{x^2-x+3-(x^2+x)}{x^2+x} = 1+\frac{-2x+3}{x^2+x}.$$

Trasferiamo la dipendenza da x dalla base all'esponente col logaritmo e poi facciamo apparire il limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t\to 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+x}\right)^{2x} &= \lim_{x\to+\infty} \exp\left(2x\log\left(1+\frac{-2x+3}{x^2+x}\right)\right) = \exp \lim_{x\to+\infty} 2x\log\left(1+\frac{-2x+3}{x^2+x}\right) = \\
&= \exp \lim_{x\to+\infty} 2x \frac{\log\left(1+\frac{-2x+3}{x^2+x}\right)}{\frac{-2x+3}{x^2+x}}\cdot\frac{-2x+3}{x^2+x} = \\
&= \exp \lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\frac{-2x+3}{x^2+x} = \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2+6x}{x^2+x} = \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{-4+6x^{-1}}{1+x^{-1}} = \\
&= \exp(-4) = \frac{1}{e^4}.
\end{aligned}$$

Alternativamente si poteva riportarsi al limite notevole $(1+\frac{1}{t})^t \to e$ per $t\to+\infty$, e poi sfruttare i fatto che se $f(x)\to\ell_1$ e $g(x)\to\ell_2$ allora $f(x)^{g(x)}\to\ell_1^{\ell_2}$ qualora $\ell_1^{\ell_2}$ non sia una forma indeterminata:

$$\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+x}\right)^{2x} = \left(\overbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x}{-2x+3}}\right)^{\frac{x^2+x}{-2x+3}}}^{\to e}\right)^{\overbrace{\frac{-2x+3}{x^2+x}\cdot 2x}^{\to -4}} \longrightarrow e^{-4}.$$



k. Nel limite

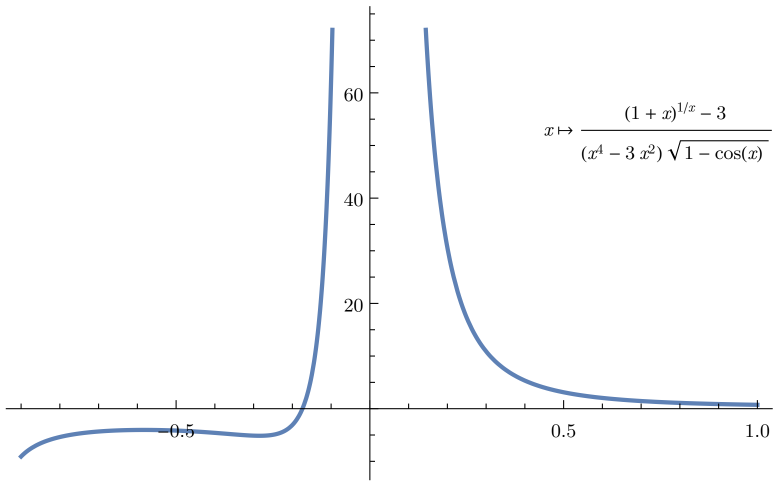
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - 3}{(x^4 - 3x^2)\sqrt{1-\cos x}}$$

il numeratore tende a $e - 3 < 0$, mentre il denominatore tende a 0. Quindi il limite è $\pm\infty$. Cerchiamo il segno del limite. Al denominatore possiamo raccogliere il fattore x^2, che lascia un fattore con limite non nullo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - 3}{(x^4 - 3x^2)\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(1+x)^{1/x} - 3}^{\to e-3}}{\underbrace{x^2 - 3}_{\to -3}} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{1-\cos x}} = \frac{3-e}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2\sqrt{1-\cos x}} =$$

$$= \frac{3-e}{3} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Il limite è $+\infty$ sia per $x \to 0^+$ che per $x \to 0^-$.



l. Nel limite

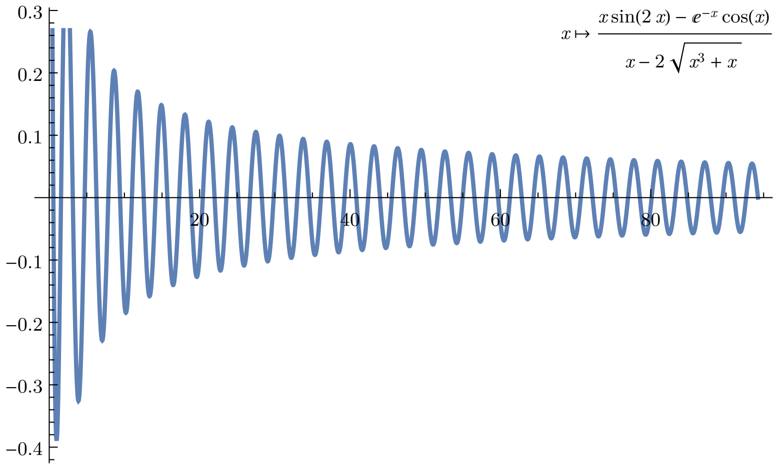
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x - e^{-x}\cos x}{x - 2\sqrt{x^3 + x}}$$

il termine $x \operatorname{sen} 2x$ è altamente oscillante, perché è il prodotto di x, che va all'infinito, per $\operatorname{sen} 2x$, che è oscillante. Il termine $e^{-x}\cos x$ tende a 0, perché prodotto di e^{-x}, che tende a 0, per $\cos x$, che oscilla fra -1 e 1. Quindi il numeratore è altamente oscillante. Il denominatore è della forma indeterminata $+\infty - \infty$. Scrivendolo nella forma $\sqrt{x^2} - \sqrt{4x^3 + 4x}$ vediamo che prevale la seconda radice, e quindi conviene raccogliere il termine principale x^3:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x - e^{-x}\cos x}{x - 2\sqrt{x^3 + x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x - e^{-x}\cos x}{x - 2x^{3/2}\sqrt{1 + x^{-2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x - e^{-x}\cos x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\underbrace{x^{-1/2} - 2\sqrt{1+x^{-2}}}_{\to 0-2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x - e^{-x}\cos x}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\overbrace{\operatorname{sen} 2x}^{-1\le\,\cdot\,\le 1}}{\underbrace{x^{1/2}}_{\to+\infty}} - \frac{\overbrace{\cos x}^{-1\le\,\cdot\,\le 1}}{\underbrace{e^x x^{3/2}}_{\to+\infty}}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$



m. Il limite

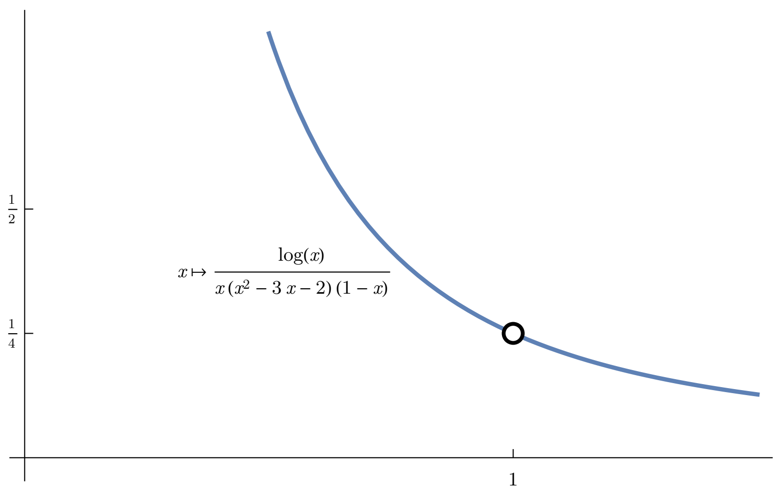
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x(x^2-3x-2)(1-x)}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. I primi due fattori al denominatore tendono a un limite finito $\neq 0$, per cui si può semplificare:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x(x^2-3x-2)(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\underbrace{x(x^2-3x-2)}_{\to 1(-4)=-4}} \cdot \frac{\log x}{1-x} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}.$$

Cerchiamo di riportarci al limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t \to 0$ col cambio di variabile $t = 1-x$:

$$-\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x} = -\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\log(1-t)}{t} = \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\log(1-t)}{-t} = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$



n. Il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\log(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{x^2-3x}}$$

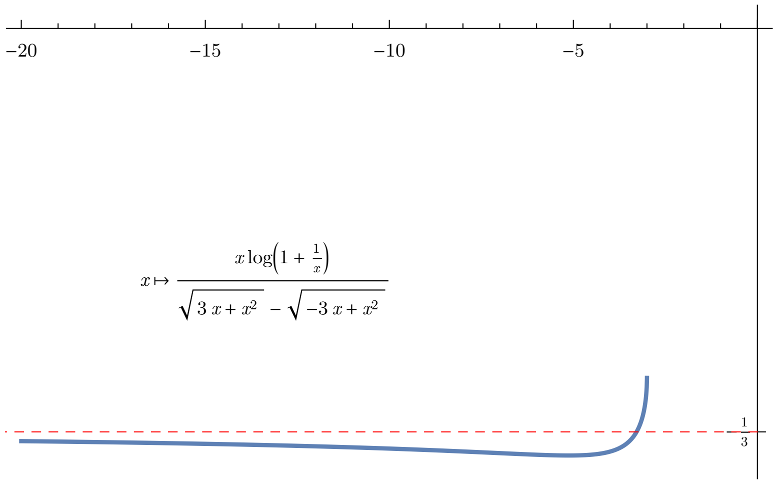
è della forma molto indeterminata $(+\infty)\cdot 0/(+\infty-\infty)$. Il numeratore si può riportare al limite notevole $(\log(1+t))/t\to 1$ per $t\to 0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\log(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{x^2-3x}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{x^2-3x}}$$

Dentro le due radici il termine principale è lo stesso: x^2. Quindi conviene moltiplicare e dividere per la somma delle radici, in modo che al denominatore x^2 si cancelli, mentre al numeratore si sommi:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{3x+x^2}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-3x}}{(3x+x^2)-(x^2-3x)}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3x^{-1}+1}+|x|\sqrt{1-3x^{-1}}}{6x}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{6x}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{3x^{-1}+1}+\sqrt{1-3x^{-1}}\right)}_{\to 2}=$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}(-1)=-\frac{1}{3}.$$

Si è usato il fatto che $|x|=-x$ quando $x\to-\infty$.



2. a. Per risolvere la disequazione

$$\frac{8-3x}{7(x-2)}+\frac{6x-1}{2(x+1)}\geq\frac{9}{14}$$

portiamo tutto al primo membro:

$$\frac{8-3x}{7(x-2)}+\frac{6x-1}{2(x+1)}\geq\frac{9}{14}\iff\frac{8-3x}{7(x-2)}+\frac{6x-1}{2(x+1)}-\frac{9}{14}\geq 0,$$

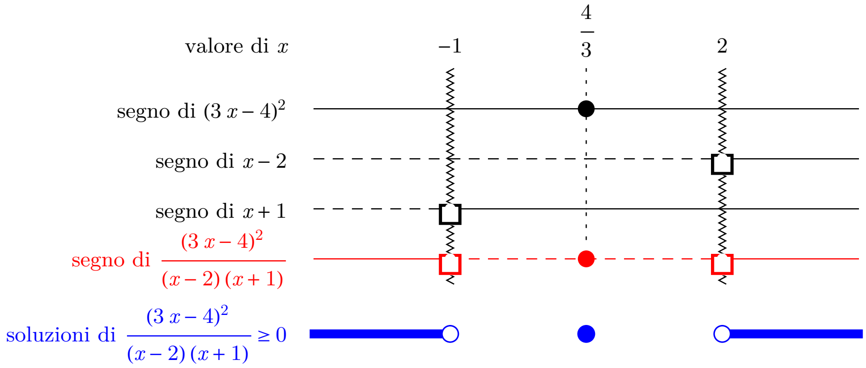
e facciamo denominatore comune, con l'intenzione di applicare la regola dei segni:

$$0\leq\frac{8-3x}{7(x-2)}+\frac{6x-1}{2(x+1)}-\frac{9}{14}=$$
$$=\frac{(8-3x)\cdot 2(x+1)+(6x-1)\cdot 7(x-2)-(x-2)(x+1)-9(x-2)(x+1)}{14(x-2)(x+1)}=$$
$$=\frac{16x+16-6x^2-6x+42x^2-84x-7x+14-9x^2+18x-9x+18}{14(x-2)(x+1)}=$$
$$=\frac{27x^2-72x+48}{14(x-2)(x+1)}=\frac{3}{14}\cdot\frac{9x^2-24x+16}{(x-2)(x+1)}.$$

Troviamo dove si annulla il numeratore. Il discriminante ridotto è $\Delta/4 = 12^2 - 9 \cdot 16 = 144 - 144 = 0$ e c'è una radice doppia $12/9 = 4/3$. Ora che ci facciamo caso, il numeratore è un quadrato perfetto:

$$\frac{3}{14} \cdot \frac{9x^2 - 24x + 16}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{14} \cdot \frac{(3x-4)^2}{(x-2)(x+1)}.$$

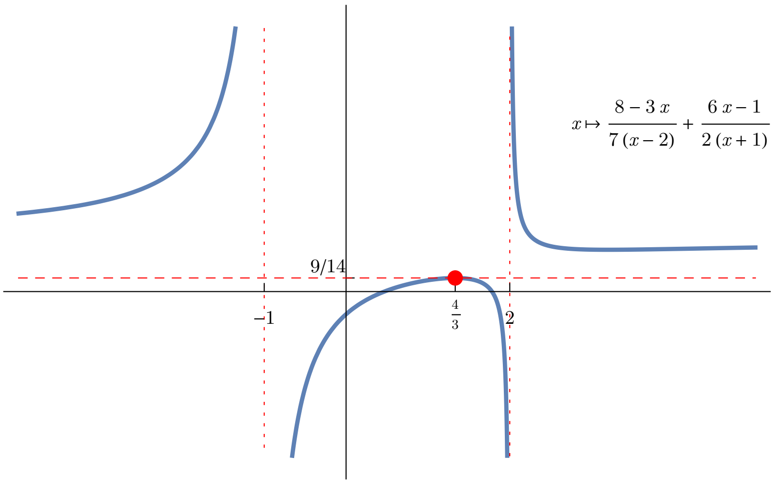
Lo studio del segno e la soluzione della disequazione sono nello schema seguente:



Si intende che i tratti orizzontali (neri o rossi) continui significano segno $+$, quelli tratteggiati il segno $-$, i pallini neri significano il segno 0 al numeratore, i quadratini bucati un segno 0 al denominatore, la linea a zigzag verticale segnala punti dove non esiste l'espressione (tipicamente uno zero del denominatore). Le linee continue blu e i pallini pieni blu vogliono dire invece soluzioni della disequazione, mentre i pallini vuoti vogliono dire non soluzione.

Tirando le fila, gli x che rendono ≥ 0 l'espressione sono quelli tali che $x < -1 \vee x = 4/3 \vee x > 2$.

Complemento. Per chi non si capacitasse della soluzione isolata $x = 4/3$, la figura seguente può essere illuminante: il grafico della funzione $x \mapsto \frac{8-3x}{7(x-2)} + \frac{6x-1}{2(x+1)}$ è tangente alla retta $y = 9/14$ proprio nel punto di ascissa $4/3$, mentre nei punti attorno sta sotto.



b. La disequazione si può ricondurre all'unione di sistemi che non contengono valori assoluti o min:

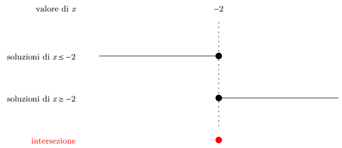
$$\max\{2x, \min\{-2, 2x+2\}\} \geq x \iff$$

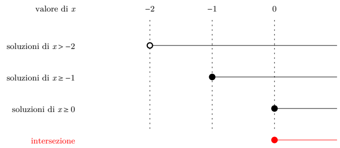
$$\iff \begin{cases} -2 \geq 2x+2 \\ \max\{2x, 2x+2\} \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < 2x+2 \\ \max\{2x, -2\} \geq x \end{cases} \iff$$

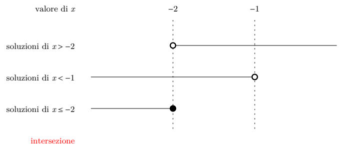
$$\iff \begin{cases} -2 \geq 2x+2 \\ 2x \geq 2x+2 \\ 2x \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -2 \geq 2x+2 \\ 2x < 2x+2 \\ 2x+2 \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < 2x+2 \\ 2x \geq -2 \\ 2x \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < 2x+2 \\ 2x < -2 \\ -2 \geq x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x \leq -4 \\ \text{falso} \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \leq -4 \\ \text{vero} \\ x \geq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x > -4 \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x > -4 \\ x < -1 \\ x \leq -2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \text{falso} \vee \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -2 \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -2 \\ x < -1 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

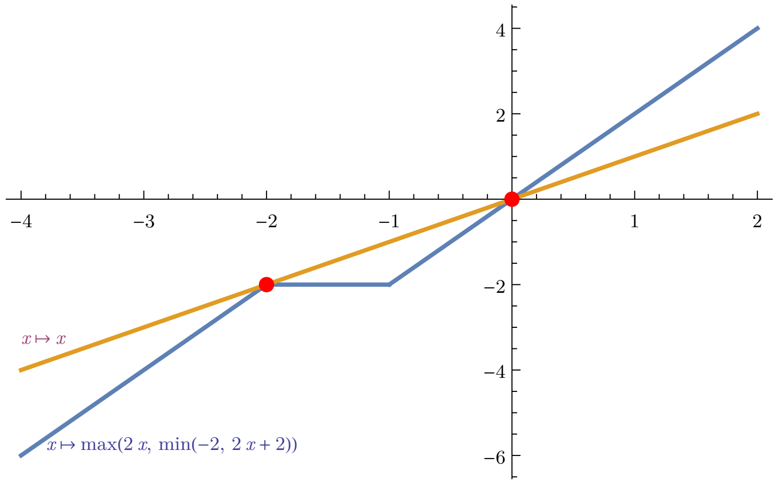






$$\iff \quad x=-2 \quad \vee \quad x \ge 0 \quad \vee \quad \text{falso} \quad \iff$$
$$\iff \quad x=-2 \quad \vee \quad x \ge 0\,.$$

Complemento. Un grafico della funzione $x \mapsto |1+\min\{1-2x, x+1\}|+x-2$ può far capire la soluzione isolata $x=0$: in quel punto la funzione vale 0, mentre nei punti attorno è negativa (il grafico è angoloso).



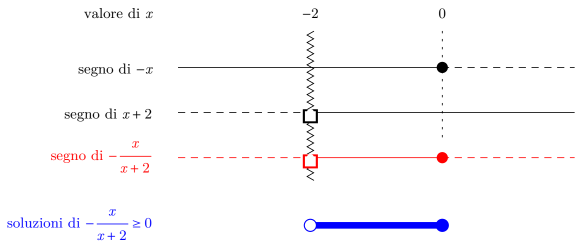
c. La disequazione $\sqrt{-x/(x+2)} \le -x$ si presenta nella forma $\sqrt{A} \le B$, che equivale a un sistema che non contiene radicali:

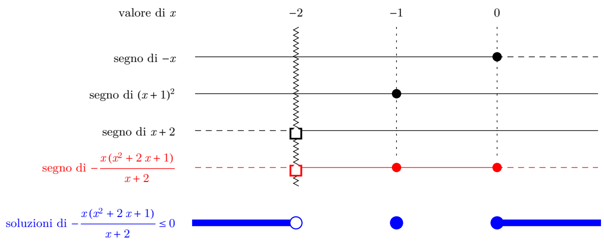
$$\sqrt{\frac{-x}{x+2}} \le -x \iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ -x \ge 0 \\ \dfrac{-x}{x+2} \le (-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ x \le 0 \\ \dfrac{-x}{x+2} \le x^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ x \le 0 \\ \dfrac{-x}{x+2} - x^2 \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ x \le 0 \\ \dfrac{-x-x^2(x+2)}{x+2} \le 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ x \le 0 \\ \dfrac{-x^3-2x^2-x}{x+2} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ x \le 0 \\ \dfrac{-x(x^2+2x+1)}{x+2} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \ge 0 \\ x \le 0 \\ \dfrac{-x(x+1)^2}{x+2} \le 0. \end{cases}$$

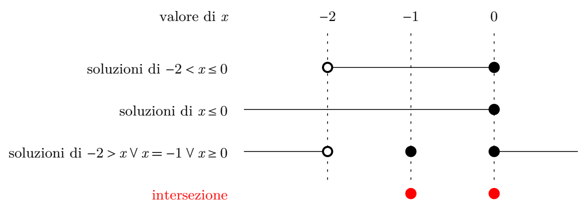
Risolviamo le due disequazioni razionali con gli schemi seguenti:





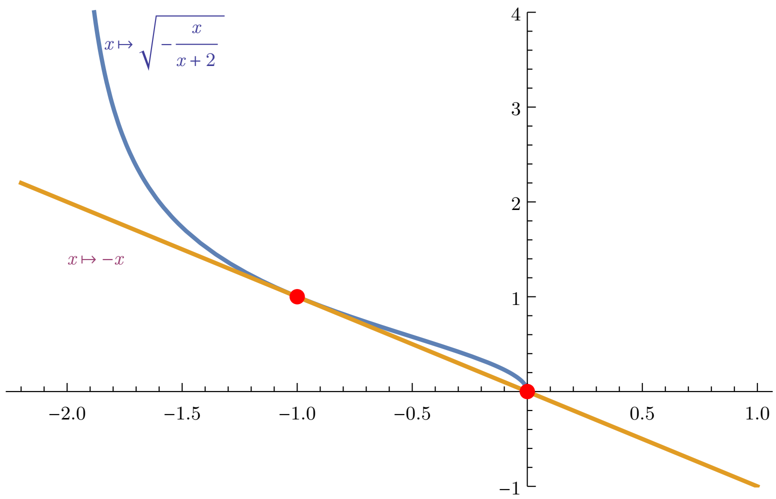
Attenzione: qualcuno sarà tentato di "cancellare il fattore $(x+1)^2$ perché è positivo". Il ragionamento sarebbe corretto se il fattore fosse >0, ma nel nostro caso il fattore è soltanto ≥ 0, e cancellarlo fa perdere soluzioni. Tornando ai nostri sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{-x}{x+2} \geq 0 \\ x \leq 0 \\ \dfrac{-x(x+1)^2}{x+2} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ x \leq 0 \\ -2 < x \vee x = -1 \vee x \geq 0 \end{cases} \iff$$



$$\iff \quad x = - \quad \vee \quad x = 0.$$

Complemento. Per capacitarsi delle due soluzioni isolate -1 e 0 forse può aiutare un grafico delle due funzioni $x \mapsto \sqrt{-x/(x+2)}$ (in blu) e $x \mapsto -x$ (in rosso):



4. Introduciamo dei simboli per le tre somme:

$$x_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$y_n = a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n},$$
$$z_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}.$$

n	a_n	x_n	y_n	z_n	$a_{2n+1}-1$	$a_{n+2}-1$	a_{2n+2}
0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	3	1	1	3
2	1	2	4	8	4	2	8
3	2	4	12	21	12	4	21
4	3	7	33	55	33	7	55
5	5	12	88	144	88	12	144

Nella tabella si riportano i valori di $n, a_n, x_n, y_n, z_n, a_{2n+1}-1, a_{n+2}-1, a_{2n+2}$ per i valori di n da 0 a 5. Le uniche uguaglianze compatibili con questa tabella sono $x_n = a_{n+2} - 1$, $y_n = a_{2n+1} - 1$ e $z_n = a_{2n+2}$. Per la decisione basterebbero i valori fino a $n = 2$. Cominciamo dimostrando la prima uguaglianza. Il predicato $\mathcal{P}(n)$ da dimostrare è semplicemente $x_n = a_{n+2} - 1$. Il caso base è $\mathcal{P}(0)$, cioè $x_0 = a_{0+2} - 1$, cioè $0 = 1 - 1$, che è vero. Esplicitiamo $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) \quad &\iff \quad x_n = a_{n+2} - 1 &&\iff \quad \overbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = a_{n+2} - 1 \\ \mathcal{P}(n+1) \quad &\iff \quad x_{n+1} = a_{(n+1)+2} - 1 &&\iff \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n} + a_{n+1} = a_{n+3} - 1. \end{aligned}$$

Confrontandoli notiamo che se si aggiunge a_{n+1} al primo membro di $\mathcal{P}(n)$ si ottiene il primo membro di $\mathcal{P}(n+1)$. Aggiungiamo dunque a_{n+1} ad entrambi i membri di $\mathcal{P}(n)$, un passaggio che conserva la verità e che conduce a $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(n) \quad &\iff \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1 \\
&\iff \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = (a_{n+2} - 1) + a_{n+1} \\
&\iff \quad x_{n+1} = \overbrace{a_{n+1} + a_{n+2}}^{a_{n+3}} - 1 \\
&\iff \quad x_{n+1} = a_{n+3} - 1 \quad \iff \quad \mathcal{P}(n+1).
\end{aligned}$$

Passiamo alla seconda uguaglianza. Il predicato $\mathcal{Q}(n)$ da dimostrare è semplicemente $y_n = a_{2n+1} - 1$. Il caso base è $\mathcal{Q}(0)$, cioè $y_0 = a_{0+1} - 1$, cioè $0 = 1 - 1$, che è vero. Esplicitiamo $\mathcal{Q}(n)$ e $\mathcal{Q}(n+1)$:

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{Q}(n) & \iff & y_n = a_{2n+1} - 1 & \iff & \overbrace{a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}} = a_{2n+1} - 1 \\
\mathcal{Q}(n+1) & \iff & y_{n+1} = a_{2(n+1)+1} - 1 & \iff & \underbrace{a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}} + a_{2(n+1)} = a_{2n+3} - 1.
\end{array}$$

Confrontandoli notiamo che se si aggiunge a_{2n+2} al primo membro di $\mathcal{Q}(n)$ si ottiene il primo membro di $\mathcal{Q}(n+1)$. Aggiungiamo dunque a_{2n+2} ad entrambi i membri di $\mathcal{Q}(n)$, un passaggio che conserva la verità e che conduce a $\mathcal{Q}(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(n) \quad &\iff \quad a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1 \\
&\iff \quad a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n} + a_{2n+2} = (a_{2n+1} - 1) + a_{2n+2} \\
&\iff \quad y_{n+1} = \overbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}^{a_{2n+3}} - 1 \\
&\iff \quad y_{n+1} = a_{2n+3} - 1 \quad \iff \quad \mathcal{Q}(n+1).
\end{aligned}$$

Veniamo all'ultima uguaglianza. Il predicato $\mathcal{R}(n)$ da dimostrare è semplicemente $z_n = a_{2n+2}$. Il caso base è $\mathcal{R}(0)$, cioè $y_0 = a_{0+2} - 1$, cioè $1 = 2 - 1$, che è vero. Esplicitiamo $\mathcal{R}(n)$ e $\mathcal{R}(n+1)$:

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{R}(n) & \iff & z_n = a_{2n+2} & \iff & \overbrace{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}} = a_{2n+2} \\
\mathcal{R}(n+1) & \iff & z_{n+1} = a_{2(n+1)+2} & \iff & \underbrace{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}} + a_{2(n+1)+1} = a_{2n+4}.
\end{array}$$

Confrontandoli notiamo che se si aggiunge a_{2n+3} al primo membro di $\mathcal{R}(n)$ si ottiene il primo membro di $\mathcal{R}(n+1)$. Aggiungiamo dunque a_{2n+3} ad entrambi i membri di $\mathcal{R}(n)$, un passaggio che conserva la verità e che conduce a $\mathcal{R}(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(n) \quad &\iff \quad a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = a_{2n+2} \\
&\iff \quad a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} + a_{2n+3} = a_{2n+2} + a_{2n+3} \\
&\iff \quad z_{n+1} = \overbrace{a_{2n+2} + a_{2n+3}}^{a_{2n+4}} \\
&\iff \quad z_{n+1} = a_{2n+4} \quad \iff \quad \mathcal{R}(n+1).
\end{aligned}$$

4. Dimostrare che $1/2$ è l'estremo superiore dell'insieme $X = \{|n|/(4n - 2|n| + 1) \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$ significa dimostrare che $1/2$ è maggiorante e che non ci sono maggioranti più piccoli di $1/2$. Vediamo se $1/2$ è maggiorante, lavorando per ora come se n fosse variabile reale, invece che intera:

$$\frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} \le \frac{1}{2} \iff \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{n}{4n - 2n + 1} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{4n - 2(-n) + 1} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff$$

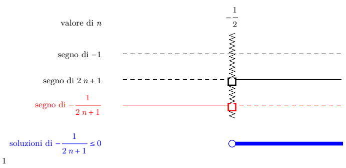
$$\iff \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{n}{2n + 1} - \dfrac{1}{2} \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{6n + 1} - \dfrac{1}{2} \le 0 \end{cases} \iff$$

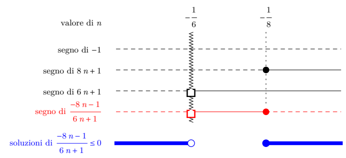
$$\iff \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{2n - (2n + 1)}{2(2n + 1)} \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-2n - (6n + 1)}{2(6n + 1)} \le 0 \end{cases} \iff$$

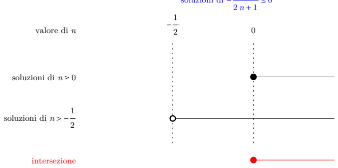
$$\iff \begin{cases} n \ge 0 \\ \dfrac{-1}{2n + 1} \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-8n - 1}{6n + 1} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \ge 0 \\ n > -1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n < -1/6 \vee n \ge -1/8 \end{cases} \iff$$

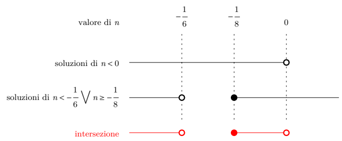
$$n \ge 0 \quad \vee \quad \Big(n < -1/6 \vee -1/8 \le n < 0\Big) \iff$$

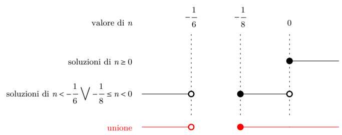
$$n < -1/6 \quad \vee \quad -1/8 \le n.$$











La disuguaglianza $|n|/(4n - 2|n| + 1) \leq 1/2$ è vera per tutti gli n reali tali che $n < -1/6 \vee -1/8 \leq x$, che comprendono in particolare tutti gli $n \in \mathbb{Z}$. Quindi $1/2$ è effettivamente un maggiorante.
Per decidere se $1/2$ è il massimo si possono ripercorrere i conti precedenti con delle uguaglianze al posto delle disuguaglianze:

$$\frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{4n - 2n + 1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{4n - 2(-n) + 1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \dots \quad \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{-1}{2n + 1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-8n - 1}{6n + 1} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \text{falso} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n = -1/8 \end{cases} \iff n = -1/8.$$

n	$\lvert n\rvert/(4n - 2\lvert n\rvert + 1)$
-10	-0.1695
-9	-0.1698
-8	-0.1702
-7	-0.1707
-6	-0.1714
-5	-0.1724
-4	-0.1739
-3	-0.1765
-2	-0.1818
-1	-0.2000
0	0.0000
1	$+0.3333$
2	$+0.4000$
3	$+0.4286$
4	$+0.4444$
5	$+0.4545$
6	$+0.4615$
7	$+0.4667$
8	$+0.4706$
9	$+0.4737$
10	$+0.4762$

Il valore $n = -1/8$ non è intero. Quindi il valore $1/2$ non appartiene a X.
Sapere che $1/2$ è maggiorante di X significa che $\sup X \leq 1/2$. Per decidere se $\sup X$ è proprio uguale a $1/2$ un tentativo può essere di calcolare i limiti per $n \to \pm\infty$ di $|n|/(4n - 2|n| + 1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{4n - 2n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n + 1} = \frac{1}{2}.$$

Giacché il limite (quando esiste) è sempre compreso fra l'inf e il sup

$$\inf X \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} \leq \sup X$$

abbiamo che

$$\inf X \leq \frac{1}{2} \leq \sup X.$$

Combinando questa con l'altra disuguaglianza $\sup X \leq 1/2$ già trovata, concludiamo che $\sup X = 1/2$.
Un modo concettualmente più elementare ma più laborioso per dimostrare che $\sup X = 1/2$ è far vedere che non ci sono maggioranti più piccoli di $1/2$, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono soluzioni intere della disuguaglianza

$$\frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Proviamo a risolverla, riciclando i conti precedenti:

$$\frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} > \frac{1}{2} - \varepsilon \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{4n - 2n + 1} > \dfrac{1}{2} - \varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{4n - 2(-n) + 1} > \dfrac{1}{2} - \varepsilon \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{2n + 1} - \dfrac{1}{2} + \varepsilon > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{6n + 1} - \dfrac{1}{2} + \varepsilon > 0 \end{cases} \iff$$

$$
\begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{2n-(2n+1)+2\varepsilon(2n+1)}{2(2n+1)} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-2n-(6n+1)+2\varepsilon(6n+1)}{2(6n+1)} > 0 \end{cases} \iff
$$

$$
\begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4\varepsilon n+2\varepsilon-1}{2n+1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{(-8+12\varepsilon)n+2\varepsilon-1}{6n+1} > 0 \end{cases} \iff
$$

$$
\begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4\varepsilon}}{n+\frac{1}{2}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \underbrace{\dfrac{(-8-12\varepsilon)n-2\varepsilon-1}{6n+1} > 0}_{\text{poco promettente}} \end{cases} \Longleftarrow
$$

$$
\Longleftarrow \begin{cases} n \geq 0 \\ n > -1/2 + \frac{1}{4\varepsilon}. \end{cases}
$$

L'ultimo sistema ha certamente soluzioni con n intero per il principio di Archimede, qualunque sia il valore di $\varepsilon > 0$. Dunque $1/2$ è l'estremo superiore di X.
Dire che $-1/5$ è il minimo di X vuol dire che è un minorante e che appartiene a X. Che sia un minorante significa che la disuguaglianza

$$
\frac{|n|}{4n-2|n|+1} \geq -\frac{1}{5}
$$

è verificata per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Facciamo il conto con n reale:

$$
\frac{|n|}{4n-2|n|+1} \geq -\frac{1}{5} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{4n-2n+1} \geq -\dfrac{1}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{4n-2(-n)+1} \geq -\dfrac{1}{5} \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{2n+1} + \dfrac{1}{5} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{6n+1} + \dfrac{1}{5} \geq 0 \end{cases} \iff
$$

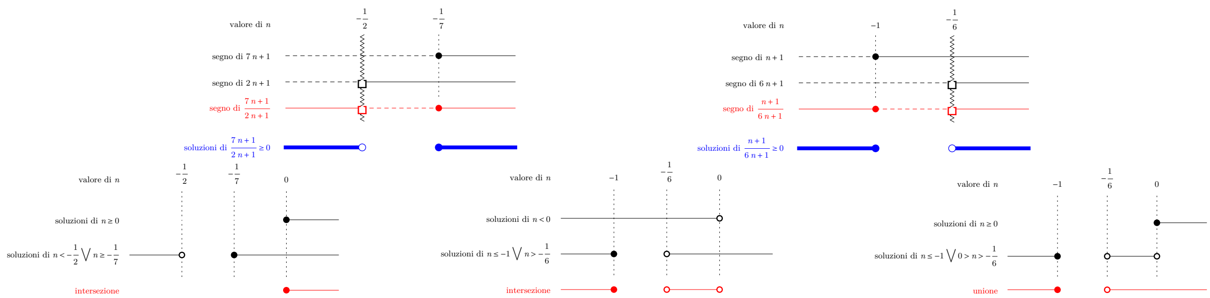
$$
\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{5n+(2n+1)}{5(2n+1)} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-5n+(6n+1)}{5(6n+1)} \geq 0 \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{7n+1}{2n+1} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n+1}{6n+1} \geq 0 \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n < -1/2 \vee n \geq -1/7 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n \leq -1 \vee n > -1/6 \end{cases} \iff
$$

$$
n \geq 0 \quad \vee \quad \Big(n \leq -1 \vee -1/6 < n < 0\Big) \iff
$$

$$
\iff \quad n \leq -1 \quad \vee \quad -1/6 < n.
$$



I valori reali di n che verificano la disuguaglianza coprono tutti i valori di $\mathbb{Z}$. Quindi effettivamente $-1/5$ è un minorante di X. Per vedere se è minimo ripercorriamo il conto con uguaglianze al posto di disuguaglianze:

$$
\frac{|n|}{4n-2|n|+1} = -\frac{1}{5} \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{4n-2n+1} = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{4n-2(-n)+1} = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \iff
$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{7n+1}{2n+1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{n+1}{6n+1} = 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n = -1/7 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n = -1 \end{cases} \iff$$
$$\iff \quad n = -1.$$

Il valore $-1/5$ è raggiunto quando $n = -1 \in \mathbb{Z}$. Quindi $-1/5 = \min X$. Il calcolo del limite per $n \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|n|}{4n - 2|n| + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-n}{6n+1} = -\frac{1}{6}$$

avrebbe dato l'informazione che $\inf X \leq -1/6$, che è vera ma di nessuna utilità.

Complemento. La struttura dell'insieme X: