Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica

Prova Scritta del 7 febbraio 2013

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(1-x)-(x-1)\operatorname{sen}x\cos 2x}{\big(x-\log(1-x)\big)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{9(x-2)\operatorname{sen}^2 x-2(x-3)^3+108\operatorname{sen}x-54e^x\cos x}{(e^x-e^{-x})(1-\sqrt{1-x^2})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-4^x+1}{(2x^2-x-1)(x^2-2x+1)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\Big(\sqrt{\log(e^x-x)}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\Big)$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{x^2(x^2-1)}{5x^2-1}$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** il segno di $f(x)$, i limiti sulla frontiera del dominio ed eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi (in ± 1 si annulla f''); **(e)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{2x^3-x^2+4}{2x^2-2x+1}\,, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{(x^2+1)\big(1+(\arctan x)^2\big)}\,, \qquad \text{(c)}\quad x^2\log x\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}(2x+1)}$, ad esempio con la sostituzione $y=\sqrt{2x-1}$.

5. Sia a_n la classica successione di Fibonacci: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$. Consideriamo una prima somma $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$, una seconda $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$ e una terza $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}$. Una delle tre somme vale $a_{2n+1}-1$, un'altra vale $a_{n+2}-1$ e la rimanente vale a_{2n+2}. Accoppiare le somme coi loro valori corretti, e dimostrare le uguaglianze per induzione.

Punti: 3+4+3+3, 2+3+3+3+1, 4+2+4, 7, 7.