Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 26 luglio 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+e^x)\operatorname{sen} x-(1+x^2)\arctan x}{(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(x-1)\operatorname{sen} x-3\operatorname{sen}^2 x+2(e^x-1)\cos 2x}{\big(\log(1-x)\big)^2\operatorname{sen}(1-\sqrt{1+x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sqrt{1-\cos x}}{\log(1+x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \log\big(x-e^{-x}+e^x\big)\operatorname{sen}\Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^2)^2}{1+x\sqrt{2}}$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** il segno di $f(x)$, i limiti sulla frontiera del dominio ed eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **(e)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{x^3+2x-1}{x^2-2x+2}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\log x}{1+x^2\log^2 x}\,,\qquad \text{(c)}\quad e^{-x}(x^2-\operatorname{sen} x)\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{(2x-1)\sqrt{x+4}}$, ad esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x+4}$.

5. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-2}{(-2)^k}=\frac{n}{(-2)^n}$.

Punti: 4+3+3+3, 2+3+3+3+1, 4+2+4, 7, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 26 luglio 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\operatorname{sen} 2x + 2(e^x-1)\cos x - 3\operatorname{sen}^2 x}{(e^x-1)^2 \operatorname{sen}\big(1-\sqrt{1+x}\big)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)\arctan x + (x^2-e^x)\operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{1-\cos x}}{1-e^x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \log\big(e^{-x}+e^x-x\big)\operatorname{sen}\Big(\frac{x}{1-x^2}\Big)$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{(x^2-1)^2}{1-x\sqrt{2}}$, si studino **(a)** il dominio di definizione ed eventuali simmetrie; **(b)** il segno di $f(x)$, i limiti sulla frontiera del dominio ed eventuali asintoti; **(c)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(d)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **(e)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni

$$\text{(a)}\quad \frac{2x^3-x+2}{x^2-2x+2}\,,\qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\log x}{1+x^2(\log x)^2}\,,\qquad \text{(c)}\quad e^{2x}(x^2-\cos x)\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{(3x-1)\sqrt{x+2}}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x+2}$.

5. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{(-3)^k} = \frac{n}{(-3)^n}$.

Punti: 3+4+3+3, 2+3+3+3+1, 4+2+4, 7, 7.