Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Prova Scritta del 2 luglio 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}(1-x) - e^{-x}(1+x) + 2(1-x)^2\log(1-x)}{(1+\cos^2 x)(e^x - \cos x)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(e^x - e^{-x})\cos^2 x - 2(2x^2 - x)\cos x - 8\log(1+x)}{\operatorname{sen}(1-\sqrt{1-x^3})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x + e^{-x} - 2}}{\operatorname{sen} x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x+1}\right)^{1-x}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{3x+1}{(x-5)(x+1)^2}$, si studino **(a)** il dominio di definizione, il segno, i limiti sulla frontiera del dominio e gli eventuali asintoti; **(b)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(c)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **(d)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni (l'ultima per parti)

$$\text{(a)} \quad \frac{2x^2+3}{4x^2+4x+5}\,, \qquad \text{(b)} \quad \frac{2\sin 2x \cos 2x}{1+\cos^2(2x)}\,, \qquad \text{(c)} \quad \log(x^2+1)\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

5. Definiamo per ricorrenza la successione $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$. Consideriamo inoltre la successione $b_n := ((-2)^n + 5)/3$. Dimostrare che vale la relazione $a_n = b_n$ per ogni $n \geq 0$.

Punti: 3+4+3+3, 3+3+3+1, 4+3+4, 7, 7.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Prova Scritta del 2 luglio 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Va riportato lo svolgimento degli esercizi. Si possono consultare libri e appunti.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-2x)\cos x + 2\log(1-x) + 2(e^x - e^{-x})\cos^2 x}{\operatorname{sen}(1-\sqrt{1+x^3})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)e^{-2x} + (x+1)e^x + 5(1-x)^2\log(1-x)}{(1+\cos^2 x)(e^x - \cos x)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{e^x + e^{-x} - 2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2+2x-3}{2x^2+x-1}\right)^{1-x}$

2. Data la funzione $f(x) := \dfrac{3x-1}{(x-1)^2(x+5)}$, si studino **(a)** il dominio di definizione, il segno, i limiti sulla frontiera del dominio e gli eventuali asintoti; **(b)** la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo/minimo locale e/o globale; **(c)** la derivata seconda, gli intervalli di convessità/concavità e gli eventuali flessi; **(d)** Si tracci un grafico qualitativo di f.

3. Trovare una primitiva (integrale indefinito) delle seguenti funzioni (l'ultima per parti)

$$\text{(a)} \quad \frac{x^2-2x}{4x^2-4x+5}\,, \qquad \text{(b)} \quad \frac{2\sin 2x\cos 2x}{1+\sin^2(2x)}\,, \qquad \text{(c)} \quad \log(1-x^2)\,.$$

4. Trovare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$, ad esempio con la sostituzione $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

5. Definiamo per ricorrenza la successione $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$. Consideriamo inoltre la successione $b_n := (4-(-2)^n)/3$. Dimostrare che vale la relazione $a_n = b_n$ per ogni $n \geq 0$.

Punti: 4+3+3+3, 3+3+3+1, 4+3+4, 7, 7.