Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 14 giugno 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - 4\sqrt{2e^x - \cos x}}{\big(\log(1-x) - \log(1+x)\big)\sqrt{2x^2 - x^3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{(e^x - \tan 2x)(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)^2(e^{-x} - 1)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{(1+\log(2-x))\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{(1+e^{2x} - 2e^x)\big(1+\cos(-2x)\big)\operatorname{sen} x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}\sqrt{2+x}}{\sqrt{1-3x} - \sqrt{1-x+2x^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x) + \log(1+\operatorname{sen} x)}{1 - x^3 - \sqrt{1+x^3}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!}{n^n(2n)^n}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+x-1}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f (raccogliere i fattori comuni nel calcolare f'); **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x) = \log|2x+1| - \dfrac{2x}{x+1}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni $3^x, e^{1-x}, (1-x)x^2, e^{x+2}, x, \frac{\log(x+1)}{x}, \log(x+1), x^4 - x^2$, si dica quali sono infinitesime o infinite per $x \to +\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{3x^3 - x}{x^2+4x+3}$, (b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-3e^{2x}}} - \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-3e^{2x}}}$, (c) $\dfrac{e^x - 2x}{x^2 - e^x}$, (d) $(e^x - x^2)\cos 2x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int xe^{3\sqrt{x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, e poi per parti.

Punti: 2+4+3+4+2+3+3, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 14 giugno 2012

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2}+3e^x(3x+\cos x)-11-6x\,\mathrm{sen}\,2x}{(2+e^{3x}-3e^x)(1-2\cos 2x)\log(1+x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5x^2(2-x)+8x(\cos x-\mathrm{sen}\,x)-16+16\sqrt{1-x}}{(e^{-2x}-\tan x)(\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,3x)^2(1-e^{-x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(3x-2)\cos 2x+e^{\mathrm{sen}\,x}\tan 2x}{(2+\log(3+x))\big(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}\big)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-\sqrt{10e^x-\cos x}}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{x^2-2x^3}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2e^{-x}-\cos x)^{3/2}-e^{3x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x-3x^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!}{n^n(2n)^n}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-3x)+\log(1+\mathrm{sen}\,2x)}{1-2x^3-\sqrt{1+2x^3}}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{(1-x)(x+1)^2}{x^2-x-1}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f (raccogliere i fattori comuni nel calcolare f'); **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=\log|1-2x|+\dfrac{2x}{1-x}$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni $\log(x+1), 3^x, x^4-x^2, (1-x)x^2, e^{x+2}, \frac{\log(x+1)}{x}, e^{1-x}, x$, si dica quali sono infinitesime o infinite per $x\to+\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

(a) $\dfrac{2x^3-3x}{x^2+2x-3}$, (b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-2e^{2x}}}-\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-2e^{2x}}}$, (c) $\dfrac{e^x-3x^2}{x^3-e^x}$, (d) $(e^x-x^2)\,\mathrm{sen}\,2x$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int xe^{\sqrt{2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x}$, e poi per parti.

Punti: 4+4+3+2+2+3+3, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 14 giugno 2012

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)-2(1+\cos x)\operatorname{sen} x-8+8\sqrt{1+x}}{(e^x-\tan 2x)(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 2x)^2(1-e^{2x})}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2e^x-\cos x)^{3/2}-e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x-2x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-3\sqrt{e^{-x}+\cos x}}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{3x^2-x^3}}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!}{n^n(2n)^n}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x-3)\cos 2x+3e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{(2-\log(x+2))\big(\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-x^2}\big)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-\operatorname{sen} 2x)}{1-2x^3-\sqrt{1+x^3}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{12(1+x)^{3/2}-11x(3e^{-x}+5\operatorname{sen} x)+5e^{2x}(x+\cos x)-17}{(2+e^{3x}-3e^x)(1+2\cos 2x)\operatorname{sen} x}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x^2-x-1}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f (raccogliere i fattori comuni nel calcolare f'); **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\log|1+2x|$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni $\frac{\log(x+1)}{x}, 3^x, \log(x+1), x, e^{1-x}, (1-x)x^2, x^4-x^2, e^{x+2}$, si dica quali sono infinitesime o infinite per $x\to+\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

$$\text{(a)}\frac{x^3-4x}{x^2-2x-3},\quad \text{(b)}\frac{e^x}{\sqrt{1-5e^{2x}}}-\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-5e^{2x}}},\quad \text{(c)}\frac{e^{2x}-1}{2x-e^{2x}},\quad \text{(d)}(x^2-e^x)\operatorname{sen} 2x\,.$$

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int xe^{-2\sqrt{x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x}$, e poi per parti.

Punti: 4+2+3+4+2+3+3, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Università degli Studi di Udine　　　　　　　　　　Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 14 giugno 2012

Cognome e Nome:

Matricola:　　　Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Sono vietati libri, appunti e calcolatori. Va riportato lo svolgimento degli esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema de L'Hôpital dove si ritenga lecito e opportuno

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(1+3x)-2x(\operatorname{sen} x+\cos 2x)-2+2\sqrt{1+2x}}{(e^{2x}+\tan x)(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 3x)^2(1-e^{2x})}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)\cos x+e^{-\operatorname{sen} 2x}\tan x}{(2+\log(x+2))\left(\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1+x^2}\right)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-\sqrt{8e^x+\cos x}}{\left(\log(1-x)-\log(1+x)\right)\sqrt{x^2-3x^3}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x\operatorname{sen} 2x-14(1+2x)^{3/2}+3e^x(5x+9\cos x)-13}{(3+e^{4x}-4e^x)(1+\cos x)\log(1-x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x}+\cos 2x)^{3/2}-2e^x\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1-x+3x^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-2\operatorname{sen} x)}{1+x^3-\sqrt{1+3x^3}}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{(2n)!}{n^n(2n)^n}$

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{1-x-x^2}$, trovare **a)** il dominio e il segno della f; **b)** i limiti sulla frontiera del dominio; **c)** gli eventuali asintoti; **d)** f' e gli intervalli di monotonia e i massimi e minimi di f (raccogliere i fattori comuni nel calcolare f'); **e)** f'' e gli intervalli di convessità/concavità; **f)** un grafico qualitativo di f.

3. Data la funzione $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}-\log|1-2x|$, trovare **a)** il dominio ed i limiti agli estremi; **b)** gli eventuali asintoti; **c)** g', la crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo di g; **d)** g'' e gli intervalli di convessità/concavità di g; **e)** in quanti punti si annulla $g(x)$ (senza necessariamente calcolarli); **f)** un grafico di g.

4. Date le funzioni $(1-x)x^2, \frac{\log(x+1)}{x}, 3^x, \log(x+1), x, e^{x+2}, x^4-x^2, e^{1-x}$, si dica quali sono infinitesime o infinite per $x\to+\infty$, e le si riordinino in lista in modo che la precedente sia "o piccolo" della successiva.

5. Si calcolino primitive delle seguenti funzioni (l'ultima per parti due volte)

$$\text{(a)}\frac{x^3+5x}{x^2-4x+3}\,,\quad \text{(b)}\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}-\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,,\quad \text{(c)}\frac{e^{2x}-x}{x^2-e^{2x}},\quad \text{(d)}(x^2-e^x)\cos 2x\,.$$

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int xe^{-\sqrt{2x}}\,dx$, per esempio con la sostituzione $y=\sqrt{x}$, e poi per parti.

Punti: 4+3+2+4+2+3+3, 8, 9, 7, 3+2+3+4, 6.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 14 giugno 2012

Svolgimento

1. a. Nel limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-4\sqrt{2e^x-\cos x}}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{2x^2-x^3}}$$

il numeratore tende a $e-4\sqrt{2-1}=e-4<0$, mentre il denominatore tende a $(0-0)\sqrt{0}=0$. Quindi il limite è $\pm\infty$, con segno da determinare, forse distinguendo $x\to 0^\pm$. Cerchiamo di portarci a una forma più maneggevole per lo studio del segno. Con l'idea di riportarci al limite notevole $(\log(1+t))/t\to 1$, moltiplichiamo e dividiamo al denominatore per x. Inoltre dentro la radice raccogliamo x^2, che lascia il fattore restante $\sqrt{2-x}$ che non tende a 0 e si può portare fuori dal limite:

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{(1+x)^{1/x}-4\sqrt{2e^x-\cos x}}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{2x^2-x^3}}=(e-4)\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{2x^2-x^3}}=$$

$$=(e-4)\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x\big(\frac{\log(1-x)}{x}-\frac{\log(1+x)}{x}\big)\sqrt{x^2(2-x)}}=$$

$$=(e-4)\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x\big(-\frac{\log(1-x)}{-x}-\frac{\log(1+x)}{x}\big)|x|\underbrace{\sqrt{2-x}}_{\to\sqrt{2}}}=$$

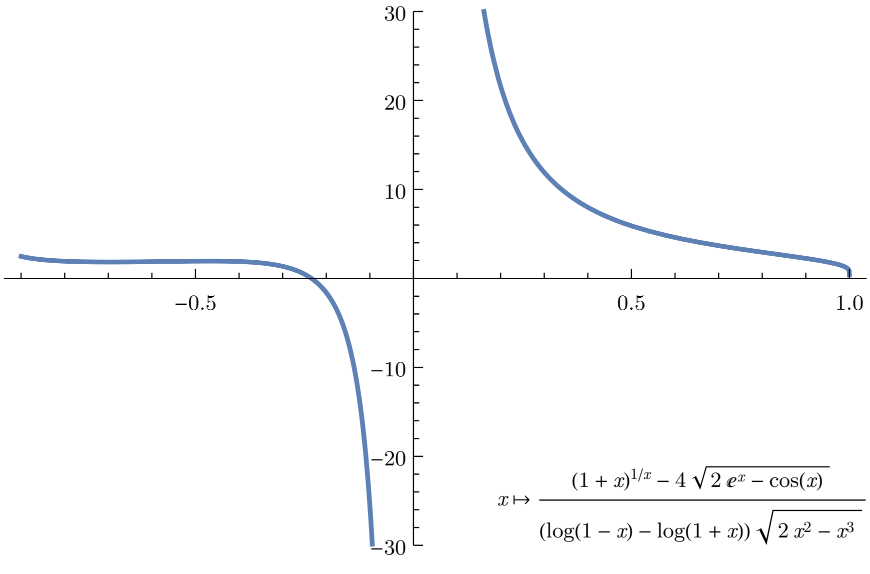
$$=\frac{e-4}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x\cdot\underbrace{\big(-\underbrace{\tfrac{\log(1-x)}{-x}}_{\to 1}-\underbrace{\tfrac{\log(1+x)}{x}}_{\to 1}\big)}_{\to -2\neq 0}|x|}=\frac{e-4}{\sqrt{2}(-2)}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x|x|}=-\frac{e-4}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x|x|}\,.$$

A questo punto distinguiamo i limiti da destra e da sinistra:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^{1/x}-4\sqrt{2e^x-\cos x}}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{2x^2-x^3}}=-\frac{e-4}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x|x|}=\overbrace{-\frac{e-4}{2\sqrt{2}}}^{>0}\cdot\frac{1}{0^+}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(1+x)^{1/x}-4\sqrt{2e^x-\cos x}}{\big(\log(1-x)-\log(1+x)\big)\sqrt{2x^2-x^3}}=-\frac{e-4}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x|x|}=\underbrace{-\frac{e-4}{2\sqrt{2}}}_{>0}\cdot\frac{1}{0^-}=+\infty,$$

Strettamente parlando il limite per $x\to 0$ non esiste.



b. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{(e^x - \tan 2x)(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)^2(e^{-x}-1)}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore è un prodotto in cui il primo fattore tende a 1 e gli altri si possono semplificare usando i limiti notevoli:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{(e^x - \tan 2x)(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)^2(e^{-x}-1)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\underbrace{e^x - \tan 2x}_{\to 1-0=1}} \cdot \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{\underbrace{\left(2x\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2x\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^2}_{\text{si raccoglie } x}(-x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\to 1}} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{x^2\left(2\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} + 2\underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}_{\to 1}\right)^2(-x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{x^2(-x)} \cdot \frac{1}{\left(2\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} + 2\underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}_{\to 1}\right)^2} = \\
&= -\frac{1}{4^2} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(3-x) - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8\sqrt{1+x}}{x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{9x^2 - 3x^3 - 4(2x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8 + 8(1+x)^{1/2}}{-16x^3}
\end{aligned}$$

Il numeratore non si presta a semplificazioni analoghe. Applichiamo la regola de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{18x - 9x^2 - 4(2-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - 4(2x+\cos x)\cos x + 8(1/2)(1+x)^{-1/2}}{-48x^2} = \\
&\lim_{x\to 0} \frac{18x - 9x^2 - 4(2-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - 4(2x+\cos x)\cos x + 4(1+x)^{-1/2}}{-48x^2}.
\end{aligned}$$

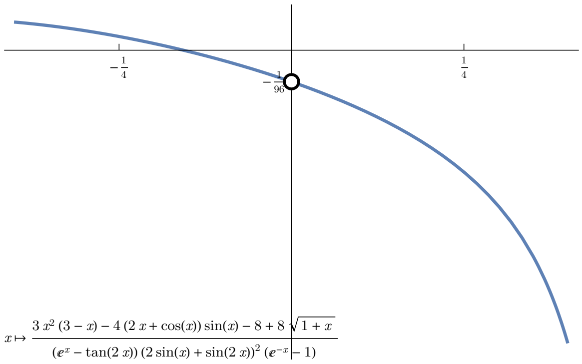
Il nuovo limite è di nuovo della forma $0/0$. Applichiamo di nuovo L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{-96x} \cdot \Big(18 - 18x - 4(-\cos x)\operatorname{sen} x - 4(2-\operatorname{sen} x)\cos x - \\
&\qquad - 4(2-\operatorname{sen} x)\cos x - 4(2x+\cos x)(-\operatorname{sen} x) + 4(-1/2)(1+x)^{-3/2}\Big) = \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{-96x} \cdot \Big(18 - 18x - 4(-\cos x - 2x - \cos x)\operatorname{sen} x - \\
&\qquad - 8(2-\operatorname{sen} x)\cos x - 2(1+x)^{-3/2}\Big) = \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{-96x} \cdot \Big(18 - 18x - 4(-\cos x - 2x - \cos x)\operatorname{sen} x - 8(2-\operatorname{sen} x)\cos x - 2(1+x)^{-3/2}\Big) = \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{-96x} \cdot \Big(18 - 18x + 8(x+\cos x)\operatorname{sen} x - 8(2-\operatorname{sen} x)\cos x - 2(1+x)^{-3/2}\Big)
\end{aligned}$$

Ancora la forma è $0/0$. Applichiamo L'Hôpital una terza volta:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{-96} \cdot \Big(-18 + 8(1-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x + 8(x+\cos x)\cos x - \\
&\qquad - 8(-\cos x)\cos x - 8(1-\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - 2(-3/2)(1+x)^{-5/2}\Big) = \frac{1}{-96} = -\frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

Il limite assegnato vale $-1/96$.



c. Nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{(1+\log(2-x))\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right)}$$

sia il numeratore che il denominatore tendono a 0. Il fattore $1 + \log(2-x)$ al denominatore tende a $1 + \log 2$, che è $\neq 0$ (la base dei logaritmi è per default e), e quindi si può semplificare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\log(2-x)} \cdot \frac{x(3x-1)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1+\log 2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$$

Si può tentare un'ulteriore semplificazione moltiplicando e dividendo per la somma delle radici che stanno al denominatore:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\log 2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{(1+x^2) - (1-x^2)} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)}_{\to 2} = \\
&= \frac{2}{1+\log 2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{2x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2-x)\cos 2x + e^{-\operatorname{sen} x}\tan x}{(1+\log 2)x^2}.
\end{aligned}$$

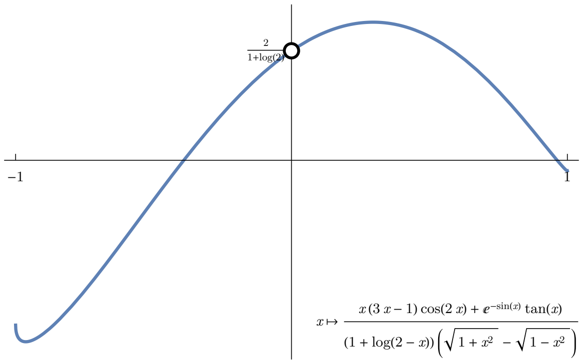
Non vedendo ulteriori semplificazioni, applichiamo l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+\log 2)x}\Big((6x-1)\cos 2x + (3x^2-x)(-2\operatorname{sen} 2x) + e^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x)\tan x + \\
&\qquad + e^{-\operatorname{sen} x}(1+\tan^2 x)\Big) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+\log 2)x}\Big((6x-1)\cos 2x + (3x^2-x)(-2\operatorname{sen} 2x) + e^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x)\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \\
&\qquad + e^{-\operatorname{sen} x}(1+\tan^2 x)\Big) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+\log 2)x}\Big((6x-1)\cos 2x + (3x^2-x)(-2\operatorname{sen} 2x) + e^{-\operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} x + 1 + \tan^2 x)\Big).
\end{aligned}$$

La forma è ancora 0/0. Riapplichiamo L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+\log 2)}\Big(6\cos 2x + (6x-1)(-2\operatorname{sen} 2x) + (6x-1)(-2\operatorname{sen} 2x) + (3x^2-x)(-4\cos 2x) + \\
&\qquad + e^{-\operatorname{sen} x}(-\cos x)(-\operatorname{sen} x + 1 + \tan^2 x) + e^{-\operatorname{sen} x}\big(-\cos x + 2(\tan x)(1+\tan^2 x)\big)\Big) = \\
&= \frac{1}{2(1+\log 2)} \cdot (6-1-1) = \frac{2}{1+\log 2}.
\end{aligned}$$

Il limite cercato è $2/(1+\log 2)$.



d. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{(1 + e^{2x} - 2e^x)\big(1+\cos(-2x)\big)\operatorname{sen} x}$$

è della forma $0/0$. Al denominatore possiamo semplificare notando che il fattore $1 + \cos(-2x)$ tende a $1 + \cos 0 = 2$, mentre negli altri fattori si possono mettere in evidenza limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{(-1 + e^{2x} + 2 - 2e^x)x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos(-2x)}}_{\to 2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}}_{\to 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{\underbrace{\left(2x\frac{e^{2x}-1}{2x} - 2x\frac{e^x-1}{x}\right)}_{\text{si raccoglie } 2x} x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{2x\underbrace{\left(\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x}\right)}_{\to 0} x}.$$

La semplificazione con gli esponenziali non è riuscita, perché il fattore messo in evidenza tende a 0. Però c'è un'altra via: notare che $1 + e^{2x} - 2e^x$ è un quadrato perfetto:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{(-1 + e^{2x} + 2 - 2e^x)x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{(e^x-1)^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{\Big(x \cdot \underbrace{\tfrac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\Big)^2 \cdot x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{x^2 \cdot x} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2}_{\to 1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8(1-x)^{3/2} - x(4e^x - 9\operatorname{sen} x) + 8e^{-x}(x - \cos x)}{2x^3}$$

Applichiamo L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{6x^2}\Big(8(3/2)(1-x)^{1/2}(-1) - (4e^x - 9\operatorname{sen} x) - x(4e^x - 9\cos x) +$$
$$+ 8e^{-x}(-1)(x - \cos x) + 8e^{-x}(1 + \sin x)\Big) =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{6x^2}\Big(-12(1-x)^{1/2} - 4e^x + 9\operatorname{sen} x - x(4e^x - 9\cos x) +$$
$$+ 8e^{-x}(-x + \cos x + 1 + \sin x)\Big)$$

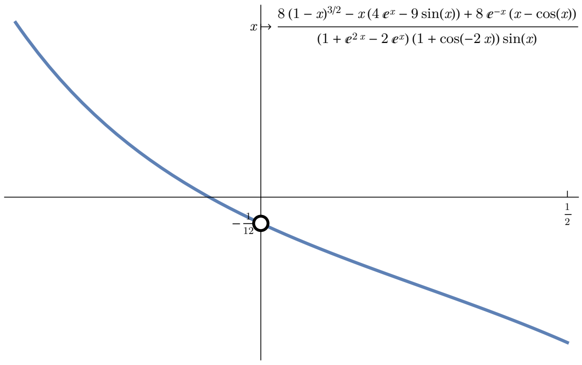
Ancora 0/0, riapplichiamo L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{12x}\Big(-12/2(1-x)^{-1/2}(-1) - 4e^x + 9\cos x - (4e^x - 9\cos x) - x(4e^x + 9\operatorname{sen} x) +$$
$$+ 8e^{-x}(-1)(-x + \cos x + 1 + \sin x) + 8e^{-x}(-1 - \operatorname{sen} x + \cos x)\Big) =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{12x}\Big(6(1-x)^{-1/2} - 8e^x + 18\cos x - x(4e^x + 9\operatorname{sen} x) +$$
$$+ 8e^{-x}(x - \cos x - 1 - \sin x - 1 - \operatorname{sen} x + \cos x)\Big) =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{12x}\Big(6(1-x)^{-1/2} - 8e^x + 18\cos x - x(4e^x + 9\operatorname{sen} x) +$$
$$+ 8e^{-x}(x - 2 - 2\sin x)\Big).$$

Ancora 0/0, riapplichiamo L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{12}\Big(6(-1/2)(1-x)^{-3/2}(-1) - 8e^x - 18\operatorname{sen} x - (4e^x + 9\operatorname{sen} x) - x(4e^x + 9\cos x) +$$
$$+ 8e^{-x}(-1)(x - 2 - 2\sin x) + 8e^{-x}(1 - 2\cos x)\Big) =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{12}\Big(3(1-x)^{-3/2} - 12e^x - 27\operatorname{sen} x - x(4e^x + 9\cos x) +$$
$$+ 8e^{-x}(-x + 2 + 2\sin x + 1 - 2\cos x)\Big) = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}.$$

Il limite iniziale vale $-1/12$.



e. Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}\sqrt{2+x}}{\sqrt{1-3x} - \sqrt{1-x+2x^2}}$$

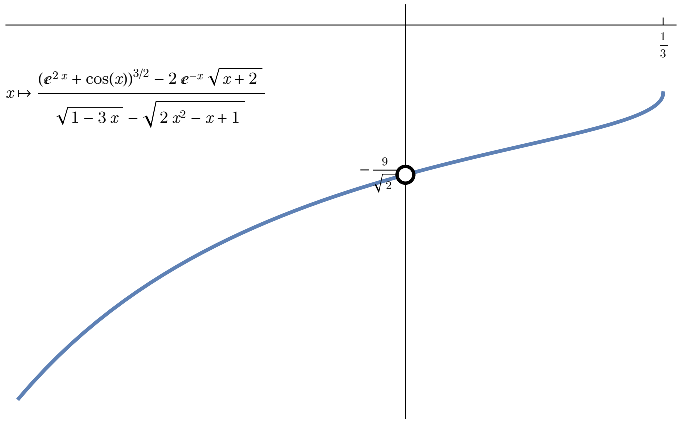
si presenta nella forma 0/0. Al denominatore c'è una differenza di due radici: se moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle due radici, il denominatore si semplifica e la somma delle radici tende a 2, che si può estrarre dal limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}\sqrt{2+x}}{\sqrt{1-3x} - \sqrt{1-x+2x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}\sqrt{2+x}}{(1-3x) - (1-x+2x^2)} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1-3x} + \sqrt{1-x+2x^2}\right)}_{\to 2} =$$
$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}\sqrt{2+x}}{-2x - 2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}\sqrt{2+x}}{-x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 1} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x} + \cos x)^{3/2} - 2e^{-x}(2+x)^{1/2}}{-x}.$$

Applichiamo L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3/2(e^{2x} + \cos x)^{1/2}(2e^{2x} - \sin x) - 2e^{-x}(-1)\sqrt{2+x} - 2e^{-x}(1/2)(2+x)^{-1/2}}{-1} = -\frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Il limite richiesto vale $-9/\sqrt{2}$.



f. Il limite

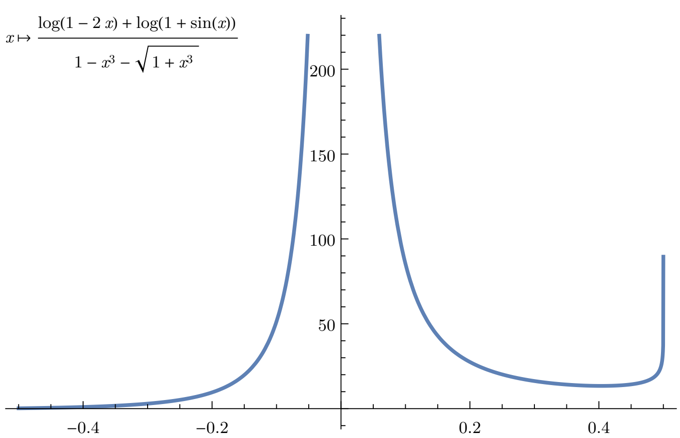
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{1-x^3-\sqrt{1+x^3}}$$

si presenta nella forma $0/0$. Il denominatore è del tipo $a-\sqrt{b}$, quindi possiamo eliminare la radice quadrata moltiplicando e dividendo per $a+\sqrt{b}$, che tende a 2:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{1-x^3-\sqrt{1+x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{(1-x^3)^2-(1+x^3)} \cdot \overbrace{\left(1-x^3+\sqrt{1+x^3}\right)}^{\to 2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{1+x^6-2x^3-1-x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\underbrace{x^3-3}_{\to -3}} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{-3x^3}.
\end{aligned}$$

Vediamo se riusciamo a semplificare anche il numeratore:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x)+\log(1+\operatorname{sen} x)}{-3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-2x\dfrac{\log(1-2x)}{-2x} + x\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}^{\text{raccogliere } x}}{-3x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{-3x^3} \cdot \underbrace{\left(-2\overbrace{\frac{\log(1-2x)}{-2x}}^{\to 1} + \overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}^{\to 1}\right)}_{\to -1} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{-3x^3}(-1) \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty
\end{aligned}$$



g. Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n(2n)^n}$$

si presenta nella forma ∞/∞. Proviamo a espandere il fattoriale e le potenze:

$$\frac{(2n)!}{n^n(2n)^n} = \frac{\overbrace{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)\cdot n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}^{2n \text{ fattori}}}{(\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n}_{n \text{ fattori}})\cdot(\underbrace{2n\cdot 2n\cdot 2n\cdot 2n\cdots 2n\cdot 2n}_{n \text{ fattori}})}$$

Il numero totale di fattori al numeratore e al denominatore è lo stesso. Riorganizziamo così, usando la commutatività e l'associatività del prodotto:

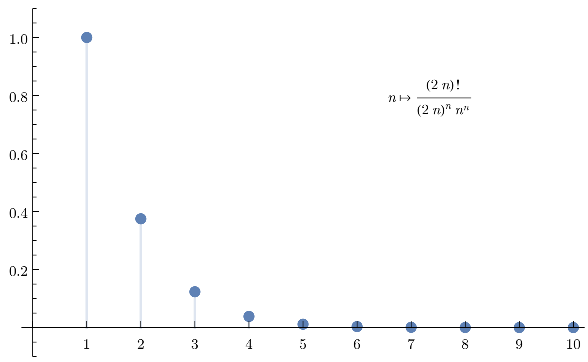
$$\frac{(2n)!}{n^n(2n)^n} = \frac{\overbrace{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}^{n \text{ fattori}}\cdot\overbrace{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}^{n \text{ fattori}}}{(\underbrace{2n\cdot 2n\cdot 2n\cdot 2n\cdots 2n\cdot 2n}_{n \text{ fattori}})\cdot(\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n}_{n \text{ fattori}})} =$$

$$= \underbrace{\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdots\frac{n+2}{2n}\cdot\frac{n+1}{2n}}_{\text{tutti } \le 1}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{\text{tutti } \le 1}$$

Scritta in questo modo è un prodotto di $2n$ frazioni in cui il denominatore è sempre maggior o uguale al numeratore. Il prodotto è quindi ≤ 1, ma questo non basta a trovare il limite. Isoliamo l'ultimo fattore e maggioriamo:

$$0 < \frac{(2n)!}{n^n(2n)^n} = \underbrace{\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdots\frac{n+2}{2n}\cdot\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}}_{\text{il prodotto è } \le 1}\cdot\frac{1}{n} \le 1\cdot\frac{1}{n} \to 0$$

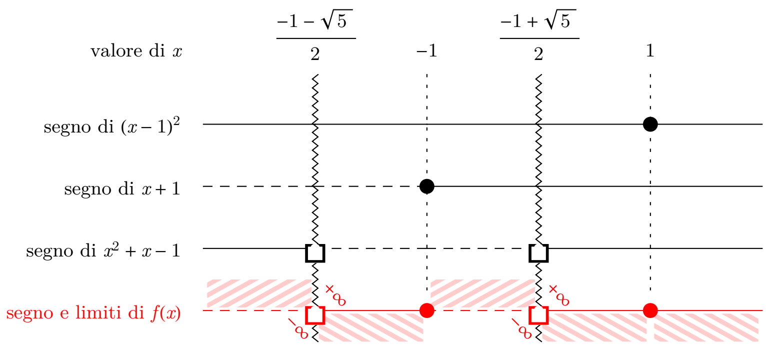
Per il teorema del confronto il limite cercato è 0.



2. a. La funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+x-1}$$

è definita dove il denominatore non si annulla. Poiché denominatore si annulla per $x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-1))}}{2}$ $= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\}$. Il segno di f si studia con lo schema seguente, che riporta anche i limiti attorno ai due punti $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.



b. I limiti nei due punti $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ sono sottoprodotto dello studio del segno:

$$\lim_{x\to(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

Restano i limiti per $x \to \pm\infty$:

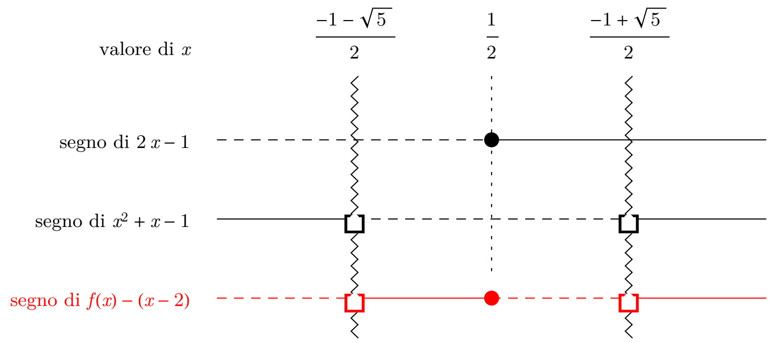
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-x^{-1})^2 x(1+x^{-1})}{x^2(1+x^{-1}-x^{-2})} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{(1-x^{-1})^2(1+x^{-1})}{1+x^{-1}-x^{-2}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty.\end{aligned}$$

c. Le due rette $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ sono asintoti verticali. Proviamo con gli obliqui:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \frac{x^2(1-x^{-1})^2 x(1+x^{-1})}{x^2(1+x^{-1}-x^{-2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-x^{-1})^2(1+x^{-1})}{1+x^{-1}-x^{-2}} = 1, \\ q &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+x-1} - x \Big) = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-2x+1)(x+1) - x(x^2+x-1)}{x^2+x-1} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x^2-2x^2-2x+x+1-x^3-x^2+x}{x^2+x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^2+x-1} = -2. \end{aligned}$$

Quindi il grafico della f è asintotico alla retta $y = x-2$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$. E' di qualche interesse capire come si posiziona il grafico di f rispetto all'asintoto. Per questo studiamo il segno di $f(x) - (mx+q)$:

$$f(x) - (mx+q) = f(x) - (x-2) = \frac{-2x^2+1}{x^2+x-1} + 2 = \frac{-2x^2+1+2(x^2+x-1)}{x^2+x-1} = \frac{2x-1}{x^2+x-1}.$$

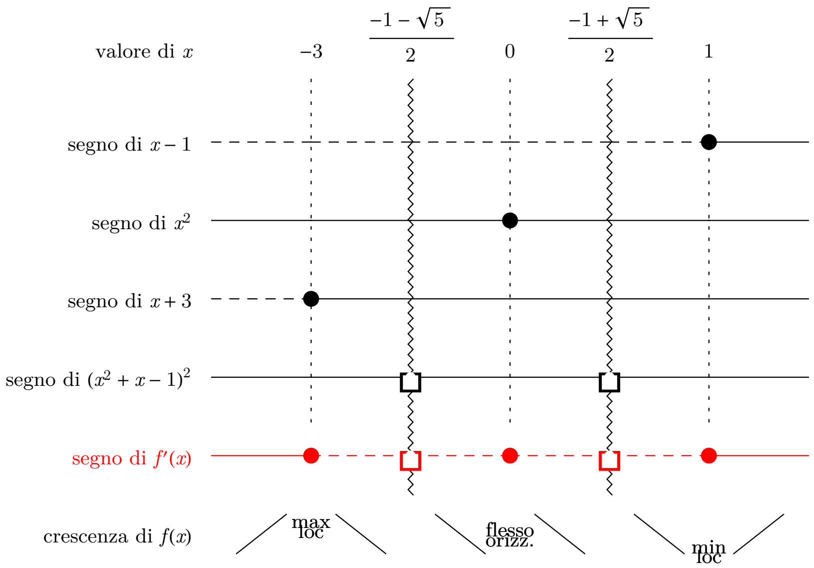


Quindi la funzione attraversa l'asintoto per $x = 1/2$, sta sopra l'asintoto per $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e per $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1/2$, e sta sotto altrove.

d. La derivata di f è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\big(2(x-1)(x+1)+(x-1)^2\big)(x^2+x-1) - (x-1)^2(x+1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = \\ &= (x-1)\cdot \frac{\big(2(x+1)+(x-1)\big)(x^2+x-1) - (x-1)(x+1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = \\ &= (x-1)\cdot \frac{(3x+1)(x^2+x-1) - (x^2-1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = \\ &= (x-1)\cdot \frac{3x^3+3x^2-3x+x^2+x-1-(2x^3+x^2-2x-1)}{(x^2+x-1)^2} = \\ &= (x-1)\cdot \frac{x^3+3x^2}{(x^2+x-1)^2} = \frac{x^2(x-1)(x+3)}{(x^2+x-1)^2}. \end{aligned}$$

Il segno di $f'(x)$ e la crescenza/decrescenza di $f(x)$ risultano dallo schema seguente:



e. Nel calcolo della derivata seconda bisogna ricordarsi di semplificare e raccogliere i fattori comuni prima di moltiplicare:

$$f''(x) = \frac{\big(2x(x-1)(x+3)+x^2(x+3)+x^2(x-1)\big)(x^2+x-1)^2 - x^2(x-1)(x+3)\cdot 2(x^2+x-1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^4} =$$

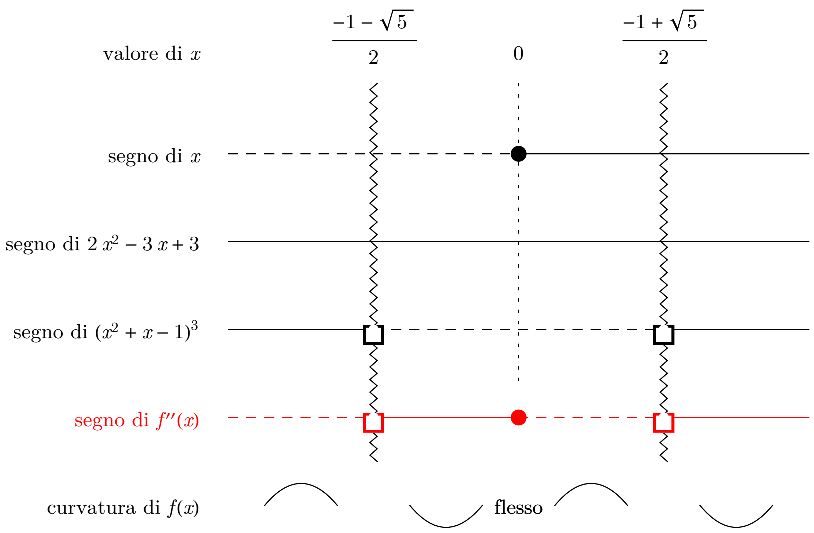
$$= x\cdot\frac{\big(2(x-1)(x+3)+x(x+3)+x(x-1)\big)(x^2+x-1)-(x^3+2x^2-3x)\cdot(4x+2)}{(x^2+x-1)^3} =$$

$$= x\cdot\frac{(4x^2+6x-6)(x^2+x-1)-(4x^4+10x^3-8x^2-6x)}{(x^2+x-1)^3} =$$

$$= x\cdot\frac{(4x^4+10x^3-4x^2-12x+6)-(4x^4+10x^3-8x^2-6x)}{(x^2+x-1)^3} =$$

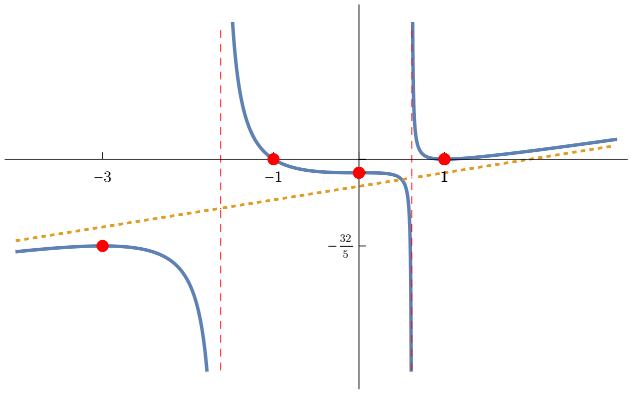
$$= 2x\frac{2x^2-3x+3}{(x^2+x-1)^3}.$$

Il polinomio $2x^2-3x+3$ ha discriminante $\Delta = 3^2-4\cdot 2\cdot 3 = -15 < 0$, e quindi è sempre > 0 sui reali. Lo studio del segno di $f''(x)$ e della convessità/concavità di f è come segue:



Il fatto che $x=0$ sia un flesso era stato riconosciuto già nello studio della derivata prima.

f. Il grafico di f ha questo aspetto:



3.a. La funzione

$$g(x) = \log|2x+1| - \frac{2x}{x+1}$$

è definita dove l'argomento del logaritmo $|2x+1|$ è > 0 e contemporaneamente il denominatore della frazione è $\neq 0$:

$$\begin{cases} |2x+1| > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Quindi il dominio di g è $\mathbb{R}\backslash\{-1,-1/2\}$. Volendo si può riscrivere la g senza il valore assoluto, distinguendo in due casi, a seconda che $2x+1$ sia positivo o negativo:

$$g(x) = \begin{cases} \log(2x+1) - \dfrac{2x}{x+1} & \text{se } x > -1/2, \\ \log\bigl(-(2x+1)\bigr) - \dfrac{2x}{x+1} & \text{se } x < -1/2. \end{cases}$$

Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$, -1 e $-1/2$. I limiti si possono calcolare così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\Bigl(\log|2x+1| - \frac{2}{1+x^{-1}}\Bigr) = \log|\pm\infty| - 2 = +\infty, \\
\lim_{x\to-1^\pm} f(x) &= \lim_{x\to-1^\pm}\Bigl(\log|2x+1| - \frac{2x}{x+1}\Bigr) = \log|2+1| - \frac{2}{0^\pm} = \log 3 - \frac{2}{0^\pm} = \mp\infty, \\
\lim_{x\to-1/2^\pm} f(x) &= \lim_{x\to-1^\pm}\Bigl(\log|2x+1| - \frac{2x}{x+1}\Bigr) = \log|0^\pm| - \frac{-1}{1/2} = \log 0^+ + 2 = -\infty.
\end{aligned}$$

b. Asintoti verticali sono le due rette $x=-1$ e $x=-1/2$. Proviamo con gli obliqui per $x\to+\infty$, tenendo conto che $|2x+1| = 2x+1$ quando $x > -1/2$ e usando il limite notevole $(\log t)/t \to 0$ per $t\to+\infty$

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\Bigl(\log|2x+1| - \frac{2x}{x+1}\Bigr) = \lim_{x\to+\infty}\Bigl(\frac{\log|2x+1|}{x} - \frac{2}{x+1}\Bigr) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\Bigl(\frac{|2x+1|}{x}\cdot\frac{\log|2x+1|}{|2x+1|} - 0\Bigr) = \lim_{x\to+\infty}\Bigl(\frac{2x+1}{x}\cdot\frac{\log(2x+1)}{(2x+1)}\Bigr) = 2\cdot 0 = 0, \\
q &= \lim_{x\to\pm\infty}\bigl(g(x) - mx\bigr) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

Analogamente per $x\to-\infty$, tenendo conto che $|2x+1| = -(2x+1)$ quando $x < -1/2$

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\Bigl(\frac{|2x+1|}{x}\cdot\frac{\log|2x+1|}{|2x+1|} - 0\Bigr) = \lim_{x\to-\infty}\Bigl(\frac{-(2x+1)}{x}\cdot\frac{\log\bigl(-(2x+1)\bigr)|}{-(2x+1)}\Bigr) = \\
&= -2\cdot 0 = 0, \\
q &= \lim_{x\to-\infty}\bigl(g(x) - mx\bigr) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

Non ci sono asintoti obliqui.

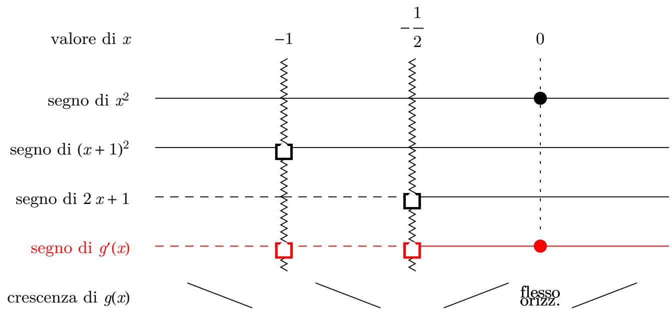
c. Per calcolare la derivata di g aiuta ricordare che la derivata di $\log|t|$ è $1/t$ sia quando $t<0$ che quando $t>0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2x+1}\cdot 2 - \frac{2(x+1)-2x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \\ &= 2\frac{(x+1)^2-(2x+1)}{(2x+1)(x+1)^2} = \frac{2x^2}{(2x+1)(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Alternativamente si può calcolare la derivata usando la formula per casi

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} D\Big(\log(2x+1) - \dfrac{2x}{x+1}\Big) & \text{se } x>-1/2, \\ D\Big(\log\big(-(2x+1)\big) - \dfrac{2x}{x+1}\Big) & \text{se } x<-1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}\cdot 2 - \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{se } x>-1/2, \\ \dfrac{1}{-(2x+1)}\cdot(-2) - \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{se } x<-1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{2x^2}{(2x+1)(x+1)^2} & \text{se } x>-1/2, \\ \dfrac{2x^2}{(2x+1)(x+1)^2} & \text{se } x<-1/2 \end{cases} \\ &= \frac{2x^2}{(2x+1)(x+1)^2}. \end{aligned}$$

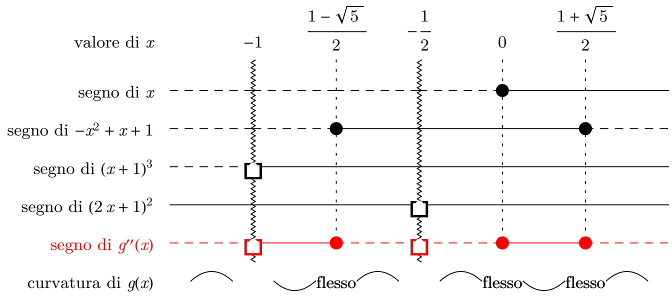
Lo studio del segno della derivata si fa nello schema seguente:



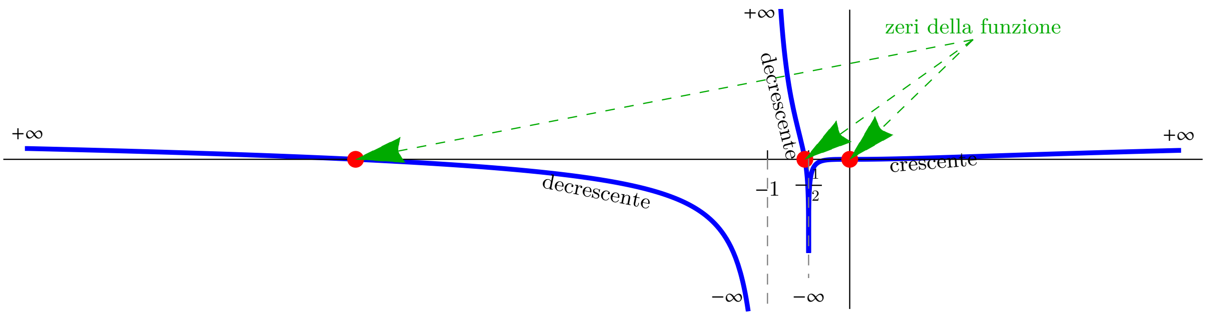
d. La derivata seconda di g è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2\cdot\frac{2x(2x+1)(x+1)^2 - x^2\big(2(x+1)^2+(2x+1)2(x+1)\big)}{(2x+1)^2(x+1)^4} = \\ &= 2x\cdot\frac{2(2x+1)(x+1) - 2x\big((x+1)+(2x+1)\big)}{(2x+1)^2(x+1)^3} = \\ &= 4x\cdot\frac{2x^2+2x+x+1-x\big(3x+2\big)}{(2x+1)^2(x+1)^3} = 2x\cdot\frac{2x^2+3x+1-3x^2-2x}{(2x+1)^2(x+1)^3} = \\ &= 2x\cdot\frac{-x^2+x+1}{(2x+1)^2(x+1)^3}, \end{aligned}$$

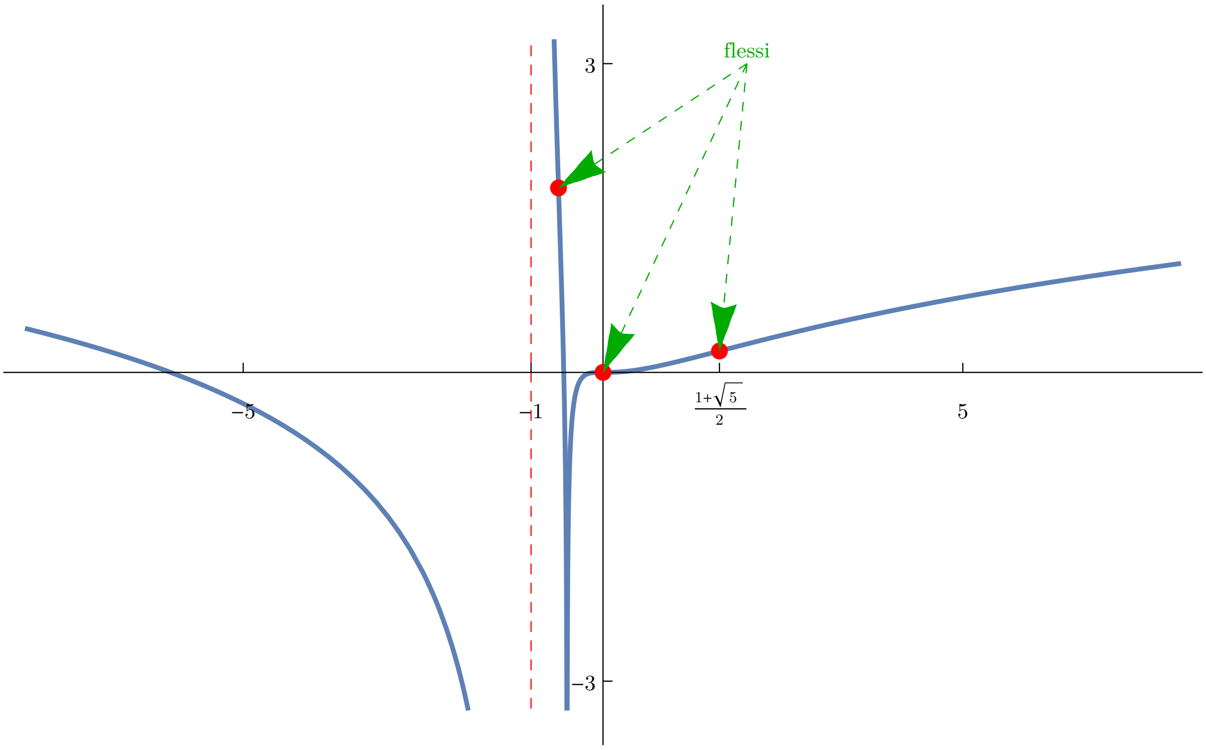
e il suo segno è presto trovato:



e. La g è continua su $]-\infty,-1[$, e agli estremi ha limiti di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla. Questo punto è unico perché su tale intervallo la g è strettamente decrescente. Un calcolo esplicito elementare di tale zero non sembra fattibile.
La g è continua su $]-1,-1/2[$, e agli estremi ha limiti di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla. Questo punto è unico perché su tale intervallo la g è strettamente decrescente. Un calcolo esplicito elementare di tale zero non sembra fattibile.
La g è continua su $]-1/2,+\infty[$, e agli estremi ha limiti di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste almeno un punto di tale intervallo in cui la funzione si annulla. Questo punto è unico perché su tale intervallo la g è strettamente decrescente. Si vede che tale punto è l'origine: $g(0)=\log 1-0=0$.
In totale la g si annulla in esattamente tre punti.



f. Il grafico di f è come segue:



4. Le funzioni $3^x, e^{x+2}, x, \log(x+1), x^4-x^2$ tendono a $+\infty$ per $x\to+\infty$. La funzione $(1-x)x^2$ tende a $-\infty$ per $x\to+\infty$. Le rimanenti due funzioni e^{1-x}, $\frac{\log(x+1)}{x}$ tendono a 0 (cioè sono infinitesime) per $x\to+\infty$. Per decidere quale dei due infinitesimi è o piccolo dell'altro calcoliamo il limite del rapporto:

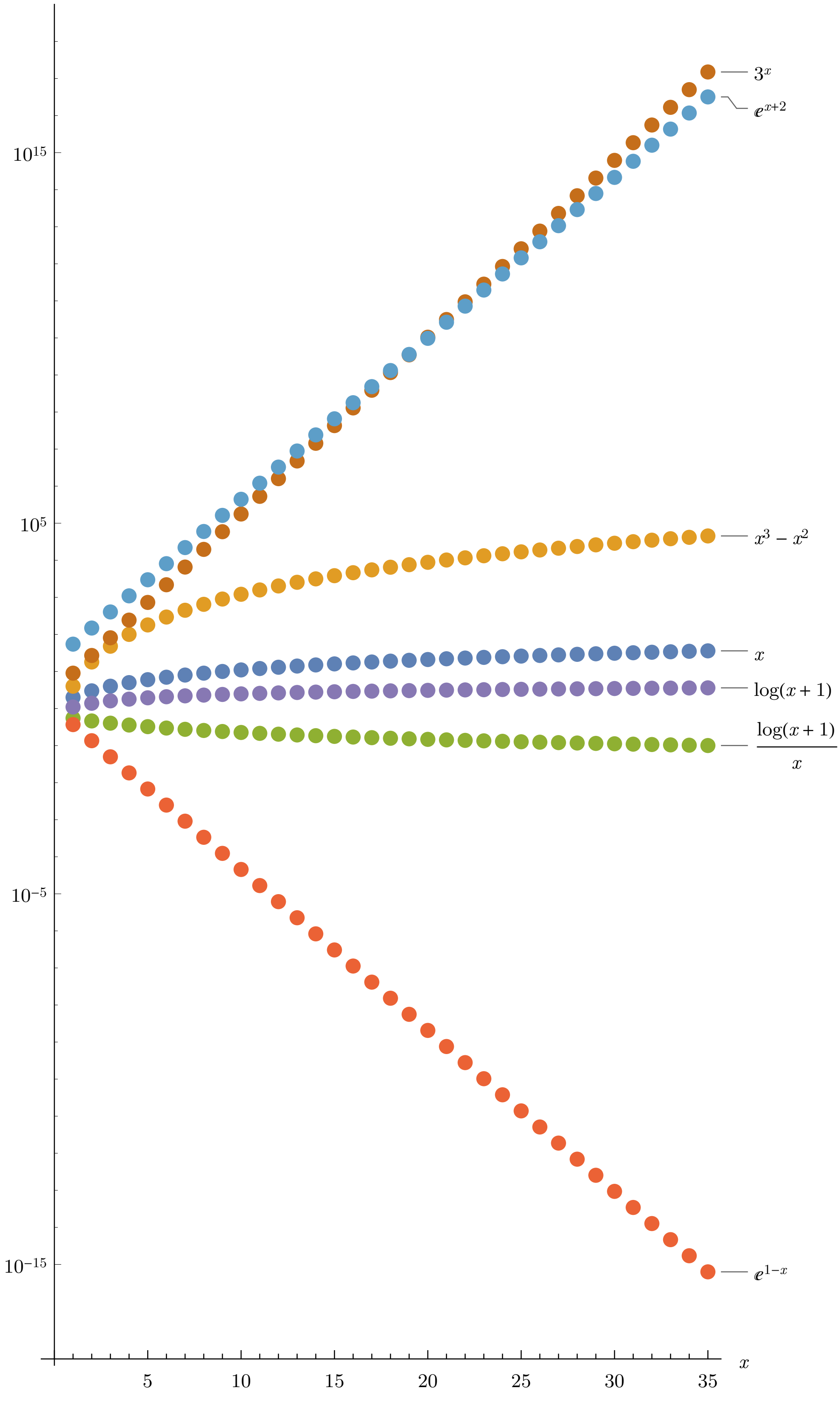
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1-x}}{\frac{\log(x+1)}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe}{e^x\log(x+1)}=e\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\cdot\frac{1}{\log(x+1)}=0\cdot\frac{1}{+\infty}=0.$$

Quindi $e^{1-x}=o(\frac{\log(x+1)}{x})$ per $x\to+\infty$. Fra gli infiniti, $\log(x+1)$ è logaritmico, quindi più lento di tutti i polinomi. I polinomi si ordinano per grado crescente: x di grado 1, $(1-x)x^2$ di grado 3, x^4-x^2

di grado 4. I polinomi sono o piccolo di tutti gli esponenziali $3^x, e^{x+2}$. Fra gli esponenziali, $e^{x+2} = e^2 e^x$ ha base $e \approx 2.718$, mentre 3^x ha base 3. Quindi $e^{x+2} = o(3^x)$. Concludendo, l'ordinamento richiesto è

$$e^{1-x}, \quad \frac{\log(x+1)}{x}, \quad \log(x+1), \quad x, \quad (1-x)x^2, \quad x^4 - x^2, \quad e^{x+2}, \quad 3^x.$$

L'ordine risalta bene nel grafico in scala logaritmica. Notare il sorpasso di 3^x ai danni di e^{x+2}.



5.a. La funzione razionale $(3x^3 - x)/(x^2 + 4x + 3)$ ha il numeratore di grado maggiore del denominatore. Facciamo la divisione di polinomi:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+3\,x^3 & & -x & & +x^2 & +4\,x & +3 \\
\cline{5-7}
-3\,x^3 & -12\,x^2 & -9\,x & & & +3\,x & -12 \\
\cline{1-4}
 & -12\,x^2 & -10\,x & & & & \\
 & +12\,x^2 & +48\,x & +36 & & & \\
\cline{1-4}
 & & +38\,x & +36 & & &
\end{array}
$$

Quindi abbiamo la decomposizione

$$\frac{3x^3 - x}{x^2 + 4x + 3} = 3x - 12 + \frac{38x + 36}{x^2 + 4x + 3}.$$

Il denominatore ha discriminante $\Delta/4 = 2^2 - 3 \cdot 1 = 1 > 0$, e quindi ha le due radici reali -2 ± 1. Possiamo decomporre in somma di fratti semplici:

$$\frac{38x + 36}{x^2 + 4x + 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3} = \frac{Ax + 3A + Bx + B}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{(A + B)x + (3A + B)}{x^2 + 4x + 3},$$

$$\begin{cases} A + B = 38 \\ 3A + B = 36 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 38 - A \\ -2A = 38 - 36 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 38 - A \\ A = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = 39, \end{cases}$$

$$\frac{38x + 36}{x^2 + 4x + 3} = \frac{-1}{x + 1} + \frac{39}{x + 3}.$$

Quindi

$$\int \frac{3x^3 - x}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \Big(3x - 12 - \frac{1}{x + 1} + \frac{39}{x + 3} \Big) dx = \frac{3}{2} x^2 - 12x - \log|x + 1| + 39 \log|x + 3|.$$

Poiché il dominio della funzione di partenza è formato dai tre intervalli separati $]-\infty, -3[$, $]-2, -1[$, $]-1, +\infty[$, se vogliamo *tutte* le primitive dobbiamo aggiungere tre costanti distinte, una per ognuno dei tre intervalli.

b. Nella funzione

$$\frac{e^x}{\sqrt{1 - 3e^{2x}}} - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - 3e^{2x}}}$$

il primo addendo ha e^{2x} dentro alla radice al denominatore, che è il quadrato del numeratore e^x. Il secondo addendo ha e^{2x} dentro alla radice al denominatore, che coincide col numeratore. Si può tentare di riportarsi per il primo addendo all'arcoseno, e nel secondo caso a una potenza, secondo gli schemi

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} dx = \arcsin f(x), \qquad \int f(x)^\alpha f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Basta aggiustare i coefficienti:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} e^x}{\sqrt{1 - \big(\sqrt{3} e^x\big)^2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{-6e^{2x}}{\sqrt{1 - 3e^{2x}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{D(\sqrt{3} e^x)}{\sqrt{1 - \big(\sqrt{3} e^x\big)^2}} + \frac{1}{6} \cdot (1 - 3e^{2x})^{-1/2} D(1 - 3e^{2x}).$$

Quindi

$$\int \Big(\frac{e^x}{\sqrt{1 - 3e^{2x}}} + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - 3e^{2x}}} \Big) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\big(\sqrt{3} e^x\big) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} (1 - 3e^{2x})^{-\frac{1}{2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\big(\sqrt{3} e^x\big) + \frac{1}{3} \sqrt{1 - 3e^{2x}}.$$

c. Nella funzione

$$\frac{e^x - 2x}{x^2 - e^x}$$

si nota che il numeratore è proprio l'opposto della derivata del denominatore, per cui ci si può riportare allo schema $\int f'(x)/f(x) dx = \log|f(x)|$:

$$\int \frac{e^x - 2x}{x^2 - e^x} dx = -\int \frac{2x - e^x}{x^2 - e^x} dx = -\int \frac{D(x^2 - e^x)}{x^2 - e^x} dx = -\log|x^2 - e^x|.$$

d. Per calcolare una primitiva di $(e^x - x^2) \cos 2x$ conviene disptribuire il prodotto nella somma $e^x \cos 2x - x^2 \cos 2x$, perché i due addendi si trattano in modo un po' diverso. Il primo si fa dapprima per parti due volte:

$$\int e^x \cos 2x\, dx = \int \cos 2x\, de^x = e^x \cos 2x - \int e^x d \cos 2x = e^x \cos 2x - \int e^x (-2 \operatorname{sen} 2x) dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \cos 2x + 2\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = e^x\cos 2x + 2\int \operatorname{sen} 2x\,de^x = \\
&= e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x - 2\int e^x\,d\operatorname{sen} 2x = \\
&= e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x - 4\int e^x \cos 2x\,dx,
\end{aligned}
$$

e poi si porta l'ultimo integrale a primo membro ottenendo

$$
5\int e^x \cos 2x\,dx = e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x,
$$

da cui

$$
\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x).
$$

L'integrale rimanente si fa pure per parti:

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos 2x\,dx &= \int x^2\,d\Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\Big) = x^2\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,d(x^2) = \\
&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int 2x \operatorname{sen} 2x\,dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x - \int x\,d\Big(-\frac{1}{2}\cos 2x\Big) = \\
&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x - x\Big(-\frac{1}{2}\cos 2x\Big) + \int \Big(-\frac{1}{2}\cos 2x\Big)dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}
$$

Concludendo

$$
\int (e^x - 2x)\cos x\,dx = \frac{1}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.
$$

5. Nell'integrale

$$
\int x e^{3\sqrt{x}}\,dx
$$

facciamo la sostituzione suggerita $y = \sqrt{x}$. Dapprima bisogna esprimere x in funzione di y: viene semplicemente $x = y^2$. Il differenziale dx diventa $dx = 2y\,dy$. Sostituiamo nell'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int x e^{3\sqrt{x}}\,dx &= \int y^2 e^{3y} 2y\,dy = 2\int y^3 e^{3y}\,dy = \\
&= 2\int y^3 d\frac{e^{3y}}{3} = 2y^3\frac{e^{3y}}{3} - 2\int \frac{e^{3y}}{3}d(y^3) = \frac{2}{3}y^3e^{3y} - 2\int \frac{e^{3y}}{3}3y^2\,dy = \\
&= \frac{2}{3}y^3e^{3y} - 2\int y^2 e^{3y}dy = \frac{2}{3}y^3e^{3y} - 2\int y^2 d\frac{e^{3y}}{3}dy = \\
&= \frac{2}{3}y^3e^{3y} - 2\Big(y^2\frac{e^{3y}}{3} - \int \frac{e^{3y}}{3}d(y^2)\Big) = \frac{2}{3}y^3e^{3y} - \frac{2}{3}y^2e^{3y} + 2\int \frac{e^{3y}}{3}2y\,dy = \\
&= \frac{2}{3}y^3e^{3y} - \frac{2}{3}y^2e^{3y} + \frac{4}{3}\int y\,d\frac{e^{3y}}{3} = \frac{2}{3}y^3e^{3y} - \frac{2}{3}y^2e^{3y} + \frac{4}{3}\Big(y\frac{e^{3y}}{3} - \int \frac{e^{3y}}{3}dy\Big) = \\
&= \frac{2}{3}y^3e^{3y} - \frac{2}{3}y^2e^{3y} + \frac{4}{9}ye^{3y} - \frac{4}{9}\int e^{3y}dy = \frac{2}{3}y^3e^{3y} - \frac{2}{3}y^2e^{3y} + \frac{4}{9}ye^{3y} - \frac{4}{9}\cdot\frac{e^{3y}}{3} = \\
&= \frac{2}{3}y^3e^{3y} - \frac{2}{3}y^2e^{3y} + \frac{4}{9}ye^{3y} - \frac{4}{27}e^{3y} = \frac{2e^{3y}}{27}\big(9y^3 - 9y^2 + 6y - 2\big).
\end{aligned}
$$

Risostituendo $y = \sqrt{x}$:

$$
\int x e^{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{2e^{3\sqrt{x}}}{27}\big(9x^{3/2} - 9x + 6\sqrt{x} - 2\big)
$$

I conti sarebbero venuti forse leggermente più semplici con la sostituzione $y = 3\sqrt{x}$.