Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 31 gennaio 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-3x^5-1)\operatorname{sen}(1/x)}{(4x-x^3)\sqrt{5x^2-x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+x^3)(3x^4-x^3+2x)}{2x(1+x)(3-x^2)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-(1+x)^{1/x}-2\log x}{(2x^2-3x+1)\big(\cos^2(x-1)-1\big)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2x^2)(x-4x^3)-8x^5}{x^3-3x^4+5}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}-\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}}\Big)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{4^x+e^x}-\sqrt{2x+2^{1+2x}}\Big)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(2^{x+1}-\sqrt{4x^3+2^{x+1}+4^{x+1}}\Big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos2x\cos3x-3\operatorname{sen}^2x}{\sqrt{x^3-x^2}-\sqrt{x^3+3x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\Big)^x$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(2+xe^{2x})}{x^2-\sqrt{x^4+4x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1-e^{x-1}}{x(x^2-x+3)(1-x)}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x^2+x\operatorname{sen}^2x}}{(e^x-e^{2x})\log(1+2x)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2+\cos x}}{(e^x-1)(x^4-3x^3)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(x-\sqrt{x^2-2x-3}\Big)^{3x}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{x+1}{x-1}+\frac{4x+1}{8x+4}+\frac{7}{12}\ge0$, (b) $\big|1+\min\{1-2x,x+1\}\big|+x-2\ge0$,

(c) $\sqrt{(2x+1)^2(16x+1)}\ge10x+1$.

3. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1/2)^k(6k-4)=2(-1/2)^n n$ per $n\ge1$.

4. Poniamo $X=\big\{2|n|/\big(2n-4|n|+1\big)\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che 0 è il massimo e -2 è il minimo di X. Quali sono l'estremo superiore e inferiore di X?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema B

Compitino del 31 gennaio 2012

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2^{x-1}-\sqrt{2^{x+1}-4x^4+4^{x-1}}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2x^3)(2x^4-x^3-3x)}{3x(x-1)(1-x^2)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2e^{4x}-3e^{2x+1}}-\sqrt{2e^{4x}-2x^2e^x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9^{x-1}-e^x}-\sqrt{2x+3^{2x}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2x^5+3)\operatorname{sen}(1/x)}{(3x-x^3)\sqrt{2x+x^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2x^2)(x-3x^3)-6x^5}{2x^2-3x^4-1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(1+x)^{1/x}-\sqrt{8+x}-\log x}{(x^2-4x+3)\big(1-\cos^2(1-x)\big)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x^2+2x\operatorname{sen}^2x}}{(e^x-e^{2x})\log(1+x)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}3x\cos x-2\operatorname{sen}^2x}{\sqrt{x^3-2x^2}-\sqrt{x^3+x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)^{4x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\log(x+e^{3x})}{x^2-\sqrt{x^4+x^3}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+\cos x}}{(e^x-1)(3x^4-4x^3)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+4}{x^2+x}\right)^x$

n) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{1-e^{x+1}}{x(3x^2-x+1)(1+x)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{4x-1}{8x-4}-\frac{1-x}{x+1}+\frac{7}{12}\geq0,$ (b) $\big|1+\min\{1-x,2x+1\}\big|-x-2\geq0,$

(c) $\sqrt{(2x-1)^2(1-16x)}\geq1-10x.$

3. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^k(3k-1)=2(-2)^n n$ quando $n\geq1$.

4. Poniamo $X=\big\{2|n|/\big(2n-4|n|+1\big)\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che 0 è il massimo e -2 è il minimo di X. Quali sono l'estremo superiore e inferiore di X?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema C

Compitino del 31 gennaio 2012

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9^x-2e^x}-\sqrt{x^2+3^{1+2x}}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-x^5+4)\operatorname{sen}(1/x)}{(3x-x^3)\sqrt{x+3x^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2x^2)(3x-2x^3)-4x^5}{x^3-5x^4+1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3e^{4x}-e^{2x-1}}-\sqrt{x^2e^x+3e^{4x}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(1+x)^{1/x}-\sqrt{10-x}+\log x}{(x^2-3x+2)\big(1-\cos^2(1-x)\big)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3x^2)(x^5-2x^2-3x^4)}{3x(x-2)(1-x^2)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2^{x+1}-\sqrt{5x^3-2^{x+1}+4^{x+1}}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{1-e^{x+1}}{x(2x^2-x-1)(1+x)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x-2}\right)^{3x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(3x+e^{2x})}{x^2-\sqrt{x^4+2x^3}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}\right)^{-x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{4-\cos x}}{(e^x-1)(3x^4-x^3)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x\cos 3x-2\cos^2 x}{\sqrt{x^3-x^2}-\sqrt{x^3+2x}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x^2+x\operatorname{sen}^2 x}}{(e^x-e^{2x})\log(1+3x)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{1-2x}{x-1}+\frac{3x+2}{2x+1}+\frac{1}{3}\geq 0$, (b) $\big|1+\min\{3-2x,x\}\big|+x-3\geq 0$,
(c) $\sqrt{(4x+9)^2(x+1)}\geq 8x+9$.

3. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1/3)^k(4k-3)=(-1/3)^n n$ quando $n\geq 1$.

4. Poniamo $X=\big\{2|n|/\big(2n-4|n|+1\big)\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che 0 è il massimo e -2 è il minimo di X. Quali sono l'estremo superiore e inferiore di X?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in ☐ Informatica e ☐ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 31 gennaio 2012

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-2x^5-4)\operatorname{sen}(1/x)}{(x-2x^3)\sqrt{x+2x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3-x}-(1+x)^{1/x}-\log x}{(2x^2-x-1)\big(\cos^2(x-1)-1\big)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+3x^2)(x^5+4x-3x^4)}{2x(3+x)(1-x^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2e^{4x}+5e^{2x+1}}-\sqrt{x^4e^x+2e^{4x}}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4^{x-1}+2e^x}-\sqrt{x^2+2^{2x}}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2^{x-1}-\sqrt{4^{x-1}-5x^2-2^{x+1}}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-3x^2)(x-3x^3)-9x^5}{2x^2-4x^4+1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{2x^2+x\operatorname{sen}^2 x}}{(e^x-e^{2x})\log(1+x)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x-3\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x^3-2x^2}-\sqrt{x^3-x}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-2x+3}\right)^{3x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\log(2+xe^{3x})}{x^2-\sqrt{x^4-2x^3}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{3+\cos x}}{(e^x-1)(2x^4-3x^3)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-3x}\right)^{-x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-e^{x-1}}{x(3x^2+x+1)(1-x)}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\displaystyle\frac{3x-2}{2x-1}-\frac{2x+1}{x+1}+\frac{1}{3}\geq 0$, (b) $\big|1+\min\{5-2x,x-1\}\big|+x-4\geq 0$,

(c) $\sqrt{(4x-9)^2(1-x)}\geq 9-8x$.

3. Dimostrare per induzione su n che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-3)^k(4k-1)=3(-3)^n n$ quando $n\geq 1$.

4. Poniamo $X=\big\{2|n|/\big(2n-4|n|+1\big)\ :\ n\in\mathbb{Z}\big\}$. Dimostrare che 0 è il massimo e -2 è il minimo di X. Quali sono l'estremo superiore e inferiore di X?

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 31 gennaio 2012

Svolgimento

Le figure che seguono ogni calcolo di limite, nonché quelle che accompagnano i **complementi** servono ad allargare l'orizzonte per il lettore, e non sono minimamente richieste nello svolgimento del compito d'esame. Gli schemi usati nella soluzione delle disequazioni sono invece parte integrante dello svolgimento; sono consigliati ma non obbligatori.

1. a. Si presenta nella forma $+\infty \cdot 0/(+\infty)$. I fattori polinomiali si semplificano raccogliendo i termini di grado massimo, spezzando in prodotto e applicando il teorema del limite del prodotto:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x^2-3x^5-1)\operatorname{sen}(1/x)}{(4x-x^3)\sqrt{5x^2-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5(2x^{-3}-3-x^{-5})\operatorname{sen}(1/x)}{x^3(4x^{-2}-1)\sqrt{x^2(5-x^{-1})}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2x^{-3}-3-x^{-5}}^{\to -3}}{\underbrace{4x^{-2}-1}_{\to -1}} \cdot \frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}} = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}}.$$

Il $\operatorname{sen}(1/x)$ si può semplificare isolandolo nel prodotto, poi moltiplicando e dividendo per l'argomento $1/x$, che tende a 0, e infine usando il limite notevole $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$ per $t \to 0$:

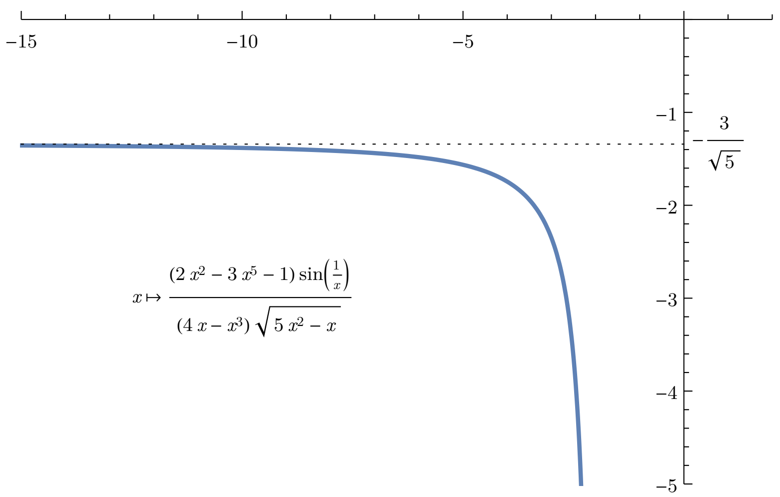
$$3\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}} = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} \cdot (1/x) =$$

$$= 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}}.$$

Occupiamoci infine della radice. Il fattore x^2 portato fuori radice diventa $|x|$. Il nostro limite è per $x \to -\infty$, e quindi $|x|$ diventa $-x$:

$$3\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(5-x^{-1})}} = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{5-x^{-1}}} = 3\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{5-x^{-1}}}$$

$$= 3\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\underbrace{\sqrt{5-x^{-1}}}_{\to\sqrt{5}}} = 3 \cdot \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$



b. Si presenta nella forma ∞/∞, rapporto di prodotti di polinomi. Raccogliamo il fattore principale in ciascun fattore e poi applichiamo il teorema del limite del prodotto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+x^3)(3x^4-x^3+2x)}{2x(1+x)(3-x^2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(2x^{-2}+1)\cdot x^4(3-x^{-1}+2x^{-3})}{2x\cdot x(x^{-1}+1)\cdot x^2(3x^{-2}-1)}=$$

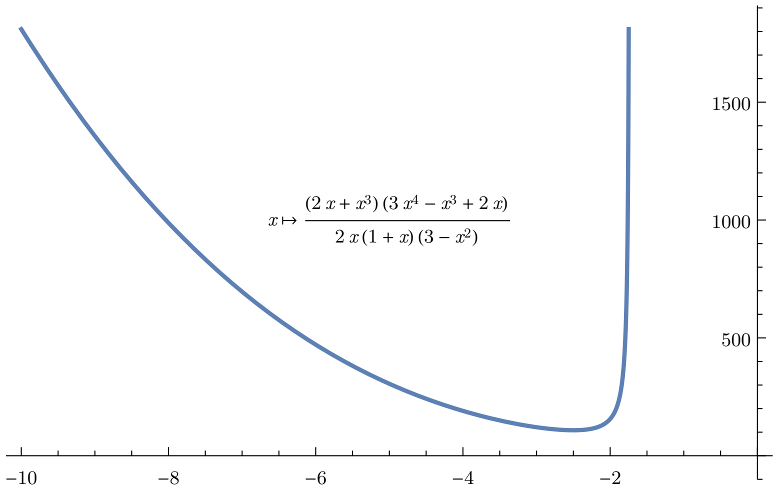
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7(2x^{-2}+1)(3-x^{-1}+2x^{-3})}{2x^4(x^{-1}+1)(3x^{-2}-1)}=\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot\frac{\overbrace{(2x^{-2}+1)(3-x^{-1}+2x^{-3})}^{\to 3}}{\underbrace{2(x^{-1}+1)(3x^{-2}-1)}_{\to -2}}=$$

$$=-\infty\cdot(-3/2)=+\infty\,.$$

Altro modo di procedere: espandere i prodotti al numeratore e denominatore usando la proprietà distributiva e poi raccogliere i termini di grado massimo:

$$\frac{(2x+x^3)(3x^4-x^3+2x)}{2x(1+x)(3-x^2)}=\frac{3x^7-x^6+6x^5+4x^2}{-2x^4-2x^3+6x^2+6x}=\frac{x^7(3-x^{-1}+6x^{-2}+4x^{-5})}{x^4(-2-2x^{-1}+6x^{-2}+6x^{-3})}$$

$$=x^3\cdot\frac{3-x^{-1}+6x^{-2}+4x^{-5}}{-2-2x^{-1}+6x^{-2}+6x^{-3}}\longrightarrow(-\infty)\cdot(-3/2)=+\infty\,.$$



c. Esaminiamo l'andamento dei singoli termini:

$$\lim_{x\to1}\frac{\overbrace{\sqrt{1+x}}^{\to\sqrt{1+1}=\sqrt{2}}-\overbrace{(1+x)^{1/x}}^{\to 2}-2\overbrace{\log x}^{\to\log 1=0}}{\underbrace{(2x^2-3x+1)}_{\to 2-3+1=0}\underbrace{\big(\cos^2(x-1)-1\big)}_{\to\cos^2 0-1=1-1=0}}$$

Il numeratore tende a $\sqrt{2}-2$, che è un numero <0, mentre il denominatore tende a 0. La forma non è indeterminata e si può applicare il teorema del limite del rapporto:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-(1+x)^{1/x}-2\log x}{(2x^2-3x+1)\big(\cos^2(x-1)-1\big)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2}-2}{(2x^2-3x+1)\big(\cos^2(x-1)-1\big)}\,.$$

e la funzione tende a $\pm\infty$. Per stabilire il segno del limite dobbiamo studiare il segno del denominatore. Il coseno è sempre compreso fra -1 e 1, il suo quadrato è ≤ 1 e quindi il fattore $\cos^2(x-1)-1$ è sempre ≤ 0. Un altro modo di arrivarci è di usare la formula trigonometrica notevole $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$, di modo che

$$\cos^2(x-1)-1=1-\operatorname{sen}^2(x-1)-1=-\operatorname{sen}^2(x-1).$$

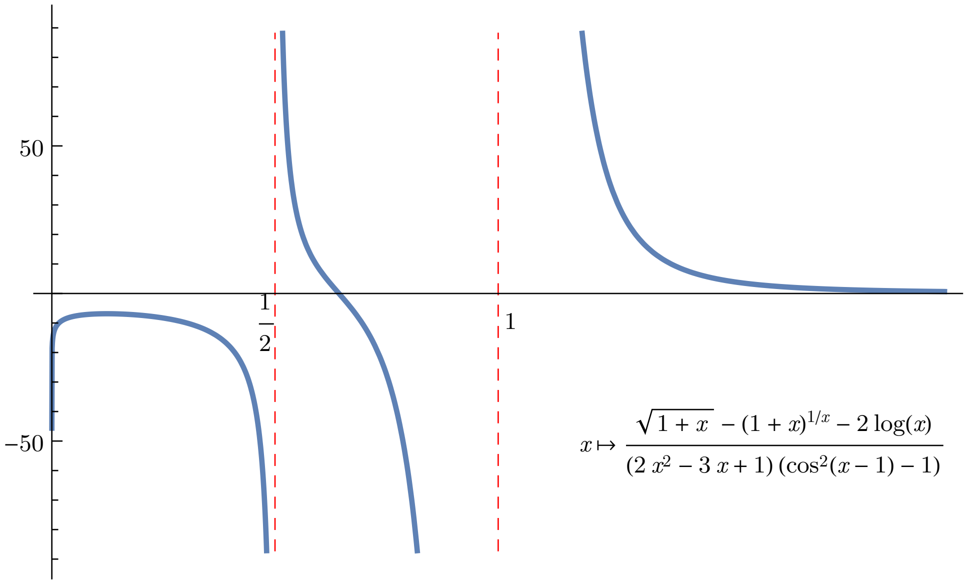
Il fattore $\cos^2(x-1)-1$ è ≤ 0 perché è uguale all'opposto di un quadrato. Rimane da studiare il segno del fattore $2x^2-3x+1$, che è un polinomio di secondo grado. Il determinante è $\Delta=3^2-4\cdot2=9-8=1$.

Il polinomio si annulla in $x = (3 \pm 1)/4$, cioè in $1/2$ e in 1. Il coefficiente di x^2 è 2. Quindi $2x^2 - 3x + 1$ è negativo nell'intervallo fra le due radici e positivo al di fuori. In particolare è negativo a sinistra di 1 e positivo a destra di 1. Nel limite di partenza siamo costretti a distinguere il caso $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{\sqrt{2}-2}^{\text{finito}<0}}{\underbrace{(2x^2-3x+1)}_{\to 0^-}\underbrace{(\cos^2(x-1)-1)}_{0^-}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{\sqrt{2}-2}^{\text{finito}<0}}{\underbrace{(2x^2-3x+1)}_{\to 0^+}\underbrace{(\cos^2(x-1)-1)}_{0^-}} = +\infty\,.$$

I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Concludiamo che, strettamente parlando, il limite iniziale non esiste (a meno di introdurre l'infinito senza segno ∞).



d. La funzione è il rapporto di due polinomi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2x^2)(x-4x^3)-8x^5}{x^3-3x^4+5}\,.$$

Proviamo a raccogliere i termini principali in ciascuno dei fattori fra parentesi al numeratore:

$$\frac{(x-2x^2)(x-4x^3)-8x^5}{x^3-3x^4+5} = \frac{x^2(x{-}1-2)\cdot x^3(x^{-2}-4)-8x^5}{x^4(x^{-1}-3+5x^{-4})} = \frac{x^5(x{-}1-2)(x^{-2}-4)-8x^5}{x^4(x^{-1}-3+5x^{-4})} =$$

$$= \frac{x^5\big((x{-}1-2)(x^{-2}-4)-8\big)}{x^4(x^{-1}-3+5x^{-4})} = x \cdot \frac{\overbrace{(x{-}1-2)(x^{-2}-4)-8}^{\to 0}}{\underbrace{x^{-1}-3+5x^{-4}}_{\to -3}}\,.$$

L'ultimo membro si presenta nella forma indeterminata $+\infty \cdot 0$. Cambiamo strada. Prima applichiamo la proprietà distributiva al numeratore e poi raccogliamo:

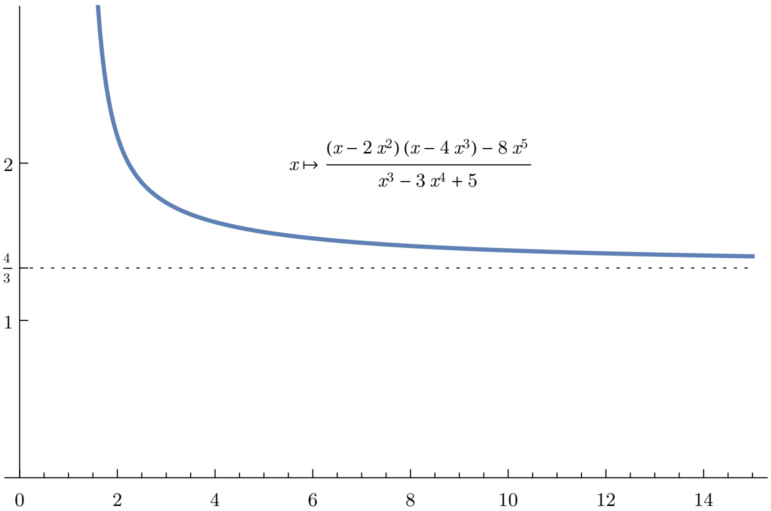
$$\frac{(x-2x^2)(x-4x^3)-8x^5}{x^3-3x^4+5} = \frac{(x^2-4x^4-2x^3+8x^5)-8x^5}{x^3-3x^4+5} =$$

$$= \frac{x^2-4x^4-2x^3}{x^3-3x^4+5} = \frac{x^4(x^{-2}-4-2x^{-1})}{x^4(x^{-1}-3+5x^{-4})} = \frac{\overbrace{x^{-2}-4-2x^{-1}}^{\to -4}}{\underbrace{x^{-1}-3+5x^{-4}}_{\to -3}} \longrightarrow \frac{4}{3}\,.$$

Sarebbe un errore grave se nell'espressione

$$\frac{x^5 \overbrace{(x^{-1}-2)(x^{-2}-4)}^{\to 8} - 8x^5}{x^3-3x^4+5}$$

si "sostituisse" il termine $(x^{-1}-2)(x^{-2}-4)$ col suo limite 8. Infatti quel termine non è né un fattore né un addendo dell'espressione complessiva, ma è annidato a un livello interno.

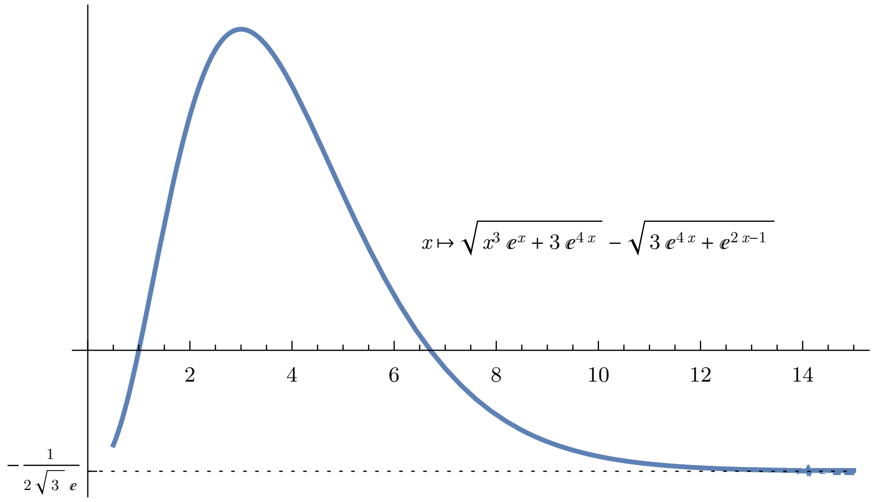


e. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}-\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}}\right)$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. I termini principali nelle due radici sono coincidenti e valgono $3e^{4x}$. Proviamo a "irrazionalizzare" in modo che i termini principali si cancellino al numeratore e si possano raccogliere al denominatore:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}-\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}} &= \frac{\left(\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}-\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}}\right)\left(\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}+\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}}\right)}{\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}+\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}}}\\
&= \frac{(x^3e^x+3e^{4x})-(3e^{4x}+e^{2x-1})}{\sqrt{x^3e^x+3e^{4x}}+\sqrt{3e^{4x}+e^{2x-1}}} =\\
&= \frac{x^3e^x-e^{2x-1}}{\sqrt{e^{4x}(x^3e^{-3x}+3)}+\sqrt{e^{4x}(3+e^{-2x-1})}} =\\
&= \frac{e^{2x}(x^3e^{-x}-e^{-1})}{e^{2x}\left(\sqrt{x^3e^{-3x}+3}+\sqrt{3+e^{-2x-1}}\right)} =\\
&= \frac{\overbrace{x^3e^{-x}-e^{-1}}^{\to e^{-1}}}{\underbrace{\sqrt{x^3e^{-3x}+3}}_{\to\sqrt{3}}+\underbrace{\sqrt{3+e^{-2x-1}}}_{\to\sqrt{3}}} \longrightarrow \frac{-e^{-1}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2e\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$



f. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4^x+e^x}-\sqrt{2x+2^{1+2x}}\right)$$

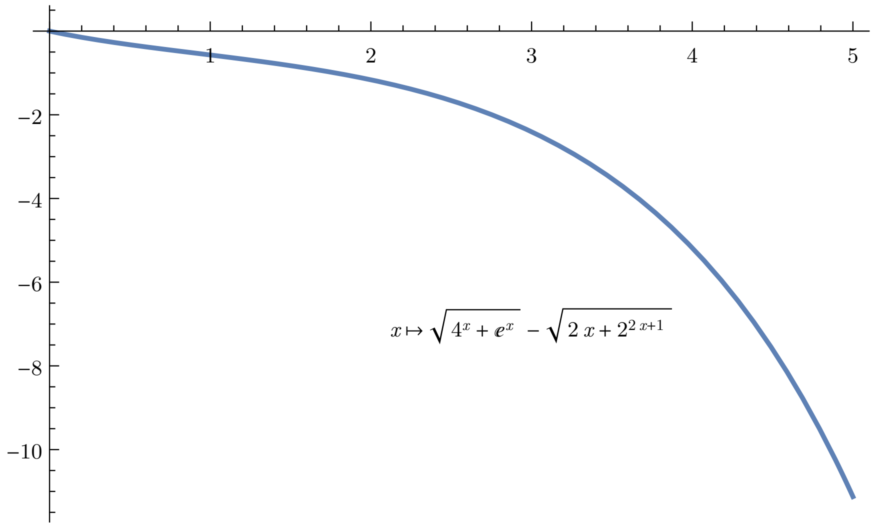
si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Cerchiamo di capire quali sono i termini principali dentro le radici:

$$\sqrt{4^x+e^x}-\sqrt{2x+2^{1+2x}}=\sqrt{4^x+e^x}-\sqrt{2x+2^1\cdot 2^{2x}}=\sqrt{4^x+e^x}-\sqrt{2x+2\cdot 4^x}\,.$$

Nella prima radice ci sono due esponenziali di base 4 e di base e, per cui prevale 4^x. Nella seconda radice c'è il polinomio $2x$ e l'esponenziale $2\cdot 4^x$, per cui prevale $2\cdot 4^x$. I termini prevalenti non sono identici, per cui conviene raccoglierli:

$$\begin{aligned}\sqrt{4^x+e^x}-\sqrt{2x+2\cdot 4^x}&=\sqrt{4^x(1+(e/4)^x)}-\sqrt{4^x(2x4^{-x}+2)}=\\&=2^x\underbrace{\Big(\overbrace{\sqrt{1+(e/4)^x}}^{\to 1}-\overbrace{\sqrt{2x4^{-x}+2}}^{\to\sqrt{2}}\Big)}_{\to 1-\sqrt{2}}\longrightarrow(+\infty)\cdot(1-\sqrt{2})=-\infty\,.\end{aligned}$$

Si sarebbe anche potuto irrazionalizzare, con conti un poco più lunghi.



g. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{x+1}-\sqrt{4x^3+2^{x+1}+4^{x+1}}\right)$$

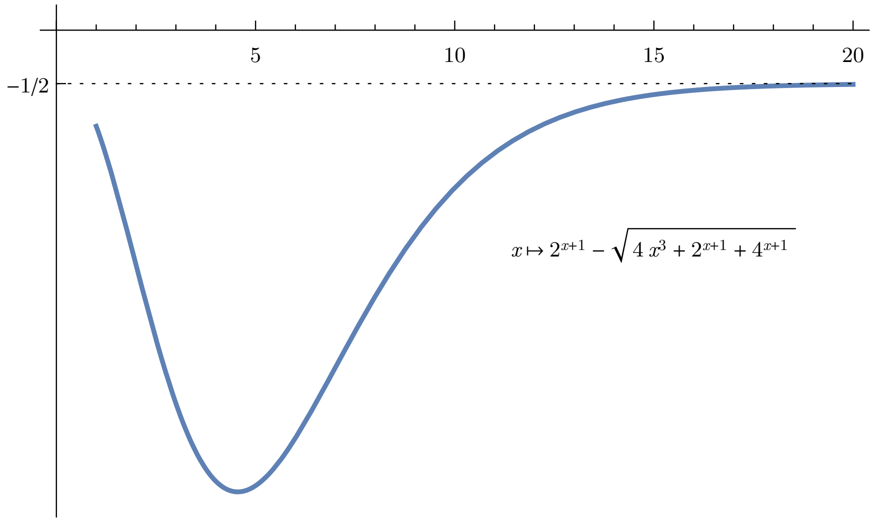
si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Sotto radice abbiamo la somma di tre termini: $4x^3$, che è un polinomio, $2^{x+1}=2\cdot 2^x$, che è un esponenziale di base 2, e $4^{x+1}=4\cdot 4^x$, che è un esponenziale di base 4. Il principale è l'esponenziale con la base massima, cioè $4^{x+1} = 4 \cdot 4^x$. Proviamo a raccoglierlo dentro radice:

$$\begin{aligned}2^{x+1} - \sqrt{4x^3 + 2^{x+1} + 4^{x+1}} &= 2^{x+1} - \sqrt{4^{x+1}(4x^3/4^{x+1} + 2^{x+1}/4^{x+1} + 1)} = \\ &= 2^{x+1} - 2^{x+1}\sqrt{4x^3 4^{-x-1} + (1/2)^{x+1} + 1} = \\ &= 2^{x+1}\Big(1 - \sqrt{\underbrace{4x^3 4^{-x-1} + (1/2)^{x+1}}_{\to 0} + 1}\Big).\end{aligned}$$

Niente da fare, troviamo una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Proviamo allora a irrazionalizzare, riciclando al denominatore i conti fatti qui sopra:

$$\begin{aligned}2^{x+1} - \sqrt{4x^3 + 2^{x+1} + 4^{x+1}} &= \frac{(2^{x+1})^2 - (4x^3 + 2^{x+1} + 4^{x+1})}{2^{x+1} + \sqrt{4x^3 + 2^{x+1} + 4^{x+1}}} = \\ &= \frac{4^{x+1} - 4x^3 - 2^{x+1} - 4^{x+1}}{2^{x+1} + \sqrt{4x^3 + 2^{x+1} + 4^{x+1}}} = \\ &= \frac{2^{x+1}(-4x^3/2^{x+1} - 1)}{2^{x+1}\Big(1 + \sqrt{4x^3 4^{-x-1} + (1/2)^{x+1} + 1}\Big)} = \\ &= \frac{-4x^3/2^{x+1} - 1}{1 + \sqrt{4x^3 4^{-x-1} + (1/2)^{x+1} + 1}} \longrightarrow \frac{0 - 1}{1 + \sqrt{0 + 0 + 1}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Il limite è $-1/2$.



h. Nel limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x^3 - x^2} - \sqrt{x^3 + 3x}}$$

il numeratore è una funzione oscillante, mentre il denominatore si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Poiché seno e coseno di qualsiasi cosa sono compresi fra -1 e 1, il numeratore è sempre compreso fra due costanti:

$$-1 - 3 \le \underbrace{\cos 2x}_{-1 \le \cdot \le 1} \cdot \underbrace{\cos 3x}_{-1 \le \cdot \le 1} - 3\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{0 \le \cdot \le 1} \le 1 + 0.$$

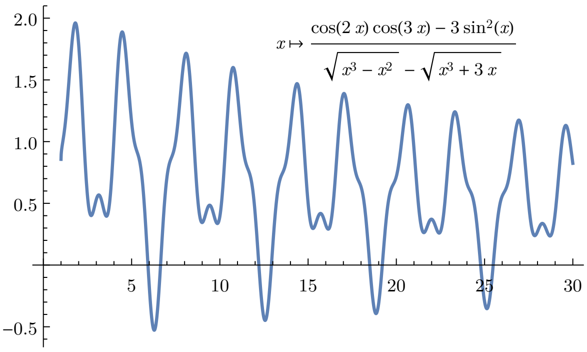
Al denominatore abbiamo la differenza di due radici, dentro le quali il termine principale è x^3 per entrambe. Razionalizziamo ed evidenziamo i termini principali:

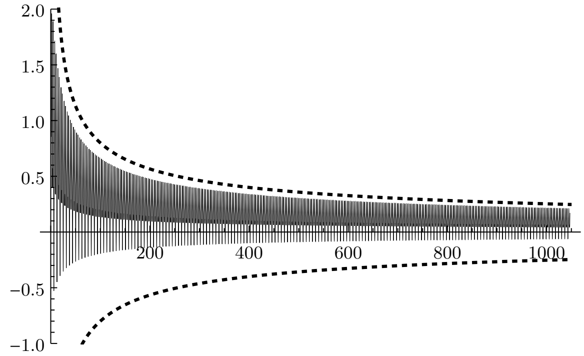
$$\begin{aligned}\frac{\cos 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x^3 - x^2} - \sqrt{x^3 + 3x}} &= \frac{\cos 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{(x^3 - x^2) - (x^3 + 3x)} \cdot \big(\sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^3 + 3x}\big) = \\ &= \frac{\cos 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{-x^2 - 3x} \cdot \big(\sqrt{x^3(1 - x^{-1})} + \sqrt{x^3(1 + 3x^{-2})}\big) = \\ &= \frac{\cos 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{x^2(-1 - 3x^{-1})} \cdot x^{3/2}\big(\sqrt{1 - x^{-1}} + \sqrt{1 + 3x^{-2}}\big) = \\ &= \frac{\cos 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{x^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - x^{-1}} + \sqrt{1 + 3x^{-2}}}{-1 - 3x^{-1}}.\end{aligned}$$

Il limite ora si presenta nella forma

$$\frac{\text{funzione limitata}}{+\infty}\cdot\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{-1-0}=0\cdot(-2)=0.$$

Il limite cercato è 0. Come si vede dalla figura, la funzione tende a 0 piuttosto lentamente. E' compresa fra $\pm 8/\sqrt{x}$ (le due linee punteggiate nella figura a destra).





i. La funzione del limite

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\Big)^x$$

è una potenza in cui sia la base che l'esponente dipendono da x. L'esponente è x, che tende a $+\infty$. La base tende a 1:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}=\frac{x^2(1-4x^{-1}+3x^{-2})}{x^2(1-x^{-1})}=\frac{1-4x^{-1}+3x^{-2}}{1-x^{-1}}\longrightarrow\frac{1-0+0}{1-0}=1.$$

Si tratta quindi di una forma indeterminata 1^∞. Un modo per dirimerla è di cercare di riportarsi al limite notevole $(1+\frac{1}{t})^t\to e$ per $t\to\pm\infty$. A tale scopo facciamo apparire un $1+\dots$ nella base:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\Big)^x&=\bigg(1+\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}-1\Big)\bigg)^x=\Big(1+\frac{x^2-4x+3-x^2+x}{x^2-x}\Big)^x=\\&=\Big(1+\frac{-3x+3}{x^2-x}\Big)^x=\Big(1+\frac{-3(x-1)}{x(x-1)}\Big)^x=\Big(1+\frac{-3}{x}\Big)^x=\Big(1+\frac{1}{-x/3}\Big)^x=\\&=\bigg(\Big(1+\frac{1}{-x/3}\Big)^{-x/3}\bigg)^{-3}\end{aligned}$$

Facendo il cambio di variabile $t=-x/3\to-\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\Big)^x=\lim_{t\to+\infty}\bigg(\Big(1+\frac{1}{-x/3}\Big)^{-x/3}\bigg)^{-3}=\lim_{t\to-\infty}\bigg(\Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t\bigg)^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}.$$

Un metodo alternativo è di trasferire tutta la variabilità all'esponente coi logaritmi in modo da riportarsi alla più familiare forma indeterminata $0\cdot\infty$:

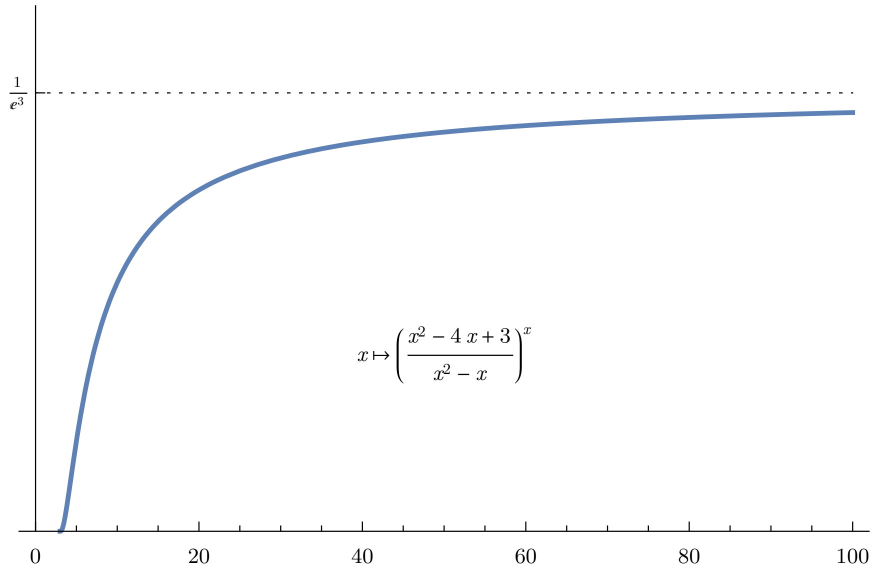
$$\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\Big)^x=\exp\Big(x\cdot\ln\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\Big)$$

per poi tentare di far apparire il limite notevole $(\ln(1+y))/y\to 1$ per $y\to 0$:

$$\begin{aligned}x\ln\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}&=x\ln\bigg(1+\Big(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}-1\Big)\bigg)=\ldots=x\ln\Big(1+\frac{1}{-x/3}\Big)=\\&=x\cdot\frac{\ln\big(1+\frac{-3}{x}\big)}{\frac{-3}{x}}\cdot\frac{1}{-x/3}=-3\cdot\frac{\ln\big(1+\frac{-3}{x}\big)}{\frac{-3}{x}}\end{aligned}$$

Quindi, col cambio di variabile $y = -3/x \to 0^-$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(-3\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{-3}{x}\right)}{\frac{-3}{x}}\right) = \lim_{y\to0^-}\exp\left(-3\cdot\frac{\ln(1+y)}{y}\right) =$$
$$= \exp(-3\cdot1) = \exp(-3) = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$



j. Nel limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\log(2+xe^{2x})}{x^2-\sqrt{x^4+4x^3}}$$

sia il numeratore che il denominatore si presentano nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Lavoriamo dapprima sul numeratore, raccogliendo il termine principale dentro il logaritmo, e poi usando la regola che il logaritmo di un prodotto è la somma dei logaritmi:

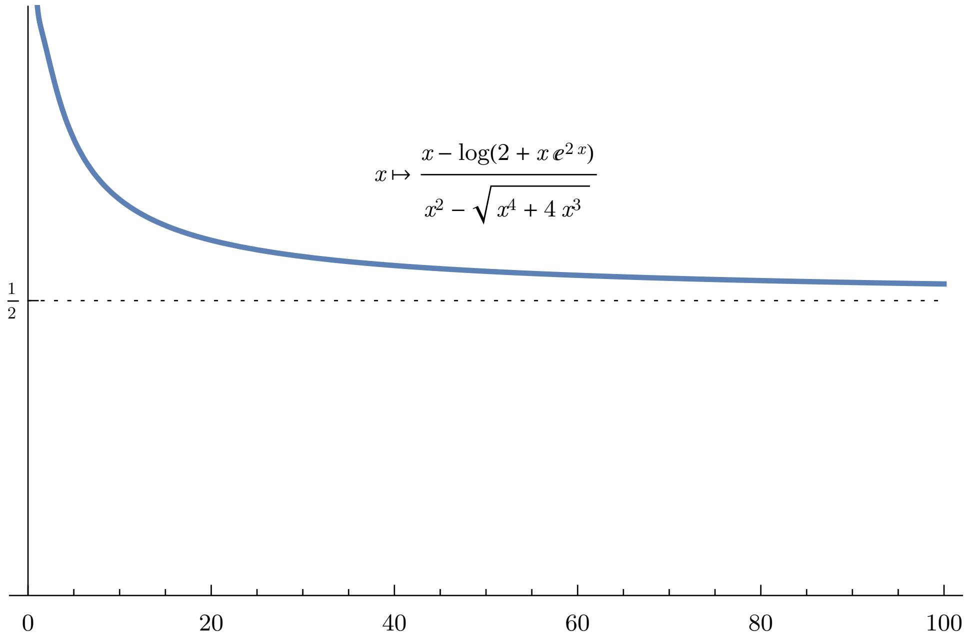
$$x-\log(2+xe^{2x}) = x-\log\left(xe^{2x}\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right)\right) = x-\left(\log x+\log e^{2x}+\log\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right)\right) =$$
$$= x-\log x-2x-\log\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right) = -x-\log x-\log\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right) =$$
$$= x\left(-1-\underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\to0}-\underbrace{\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right)}_{\to0\cdot\log1=0\cdot0=0}\right).$$

Quindi il numeratore tende a $-\infty$. Il denominatore il termine principale sotto radice è x^4, che fattorizzato e portato fuori diventa x^2, identico al primo addendo. Quindi (ir)razionalizziamo il denominatore:

$$x^2-\sqrt{x^4+4x^3} = \frac{(x^2)^2-(x^4+4x^3)}{x^2+\sqrt{x^4+4x^3}} = \frac{-4x^3}{x^2+\sqrt{x^4(1+4x^{-1})}} = \frac{-4x^3}{x^2+x^2\sqrt{1+4x^{-1}}} =$$
$$= \frac{-4x}{1+\sqrt{1+4x^{-1}}}$$

Anche il denominatore tende a $-\infty$. Rimettiamo insieme la frazione:

$$\frac{x-\log(2+xe^{2x})}{x^2-\sqrt{x^4+4x^3}} = \frac{x\left(-1-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right)\right)}{\frac{-4x}{1+\sqrt{1+4x^{-1}}}} =$$
$$= \frac{-1-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{xe^{2x}}+1\right)}{\frac{-4}{1+\sqrt{1+4x^{-1}}}} \longrightarrow \frac{-1-0-0}{\frac{-4}{1+1}} = \frac{1}{2}.$$



k. Nel limite

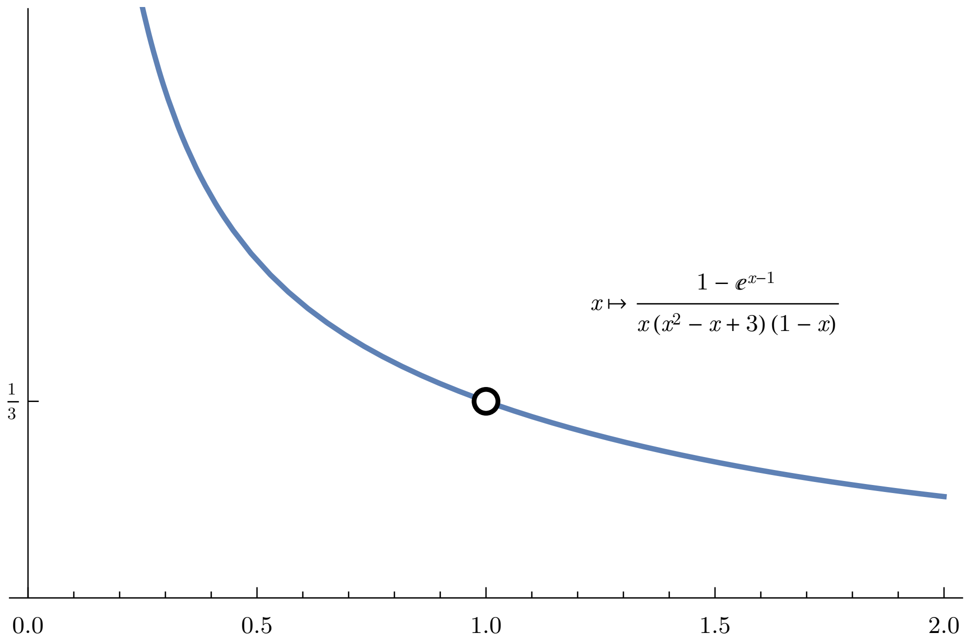
$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{x(x^2 - x + 3)(1 - x)}$$

i primi due fattori al denominatore tendono a numeri finiti non nulli. Quindi per il teorema del limite del prodotto

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{x(x^2 - x + 3)(1 - x)} \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x(x^2 - x + 3)}}_{\to 1(1-1+3)=3} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - x}.$$

Il limite rimanente si può riportare al limite notevole $(e^t - 1)/t \to 1$ per $t \to 0$ cambiando di segno numeratore e denominatore e ponendo $t = x - 1 \to 0$:

$$\frac{1}{3} \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$



1. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2 + x \operatorname{sen}^2 x}}{(e^x - e^{2x}) \log(1+2x)}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il logaritmo si può semplificare cercando di far apparire il limite notevole $(\log(1+t))/t \to 1$ per $t \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2 + x \operatorname{sen}^2 x}}{(e^x - e^{2x}) \log(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2 + x \operatorname{sen}^2 x}}{(e^x - e^{2x}) \cdot 2x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\log(1+2x)}{2x}}}_{\to 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + x \operatorname{sen}^2 x}}{2(e^x - e^{2x})}.$$

Dentro la radice quadrata raccogliere x non porta vantaggi. Raccogliamo invece x^2:

$$\sqrt{x^2 + x \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{x^2\Big(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\Big)} = |x|\sqrt{1 + x\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} = |x| \underbrace{\sqrt{1 + x\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^2}}_{\to\sqrt{1+0\cdot 1^2}=1}.$$

Quindi possiamo ulteriormente semplificare il limite iniziale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + x \operatorname{sen}^2 x}}{2(e^x - e^{2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2(e^x - e^{2x})} \cdot \sqrt{1 + x\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2(e^x - e^{2x})}.$$

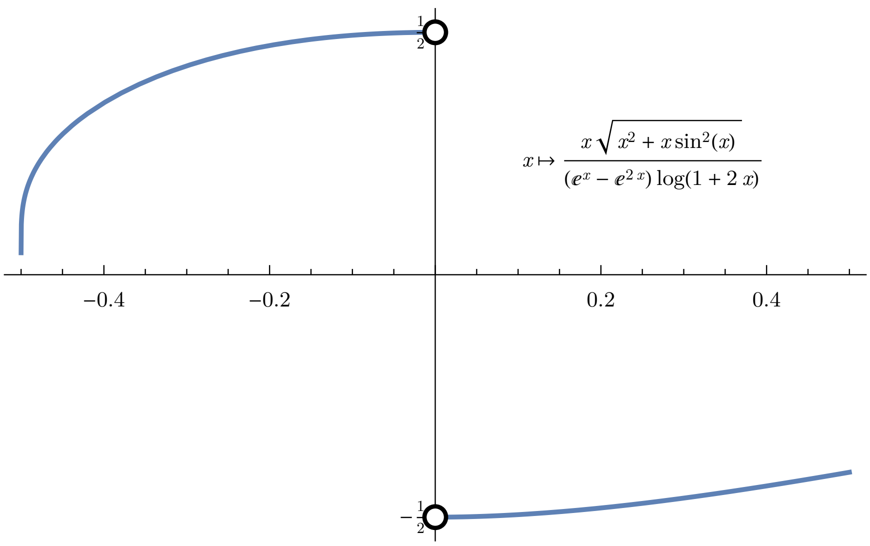
Proviamo ad aggiungere e togliere 1 al denominatore in modo da far apparire (due volte) il limite notevole $(e^t - 1)/t \to 1$ per $t \to 0$, raccogliere x e spezzare in prodotto, in modo da applicare il teorema del limite del prodotto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2(e^x - e^{2x})} &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2\big(e^x - 1 - (e^{2x} - 1)\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2\big(\frac{e^x-1}{x}x - \frac{e^{2x}-1}{2x}2x\big)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2x} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{2x}-1}{2x}2}_{\to 1-1\cdot 2=-1}} = -\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{2x}.\end{aligned}$$

Poiché c'è il valore assoluto di x, spezziamo nel limite destro e sinistro:

$$-\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{2x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{2x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad -\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{2x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

I limiti sinistro e destro sono rispettivamente $\pm 1/2$. Pertanto il limite bilaterale proposto non esiste.



m. Nella funzione del limite

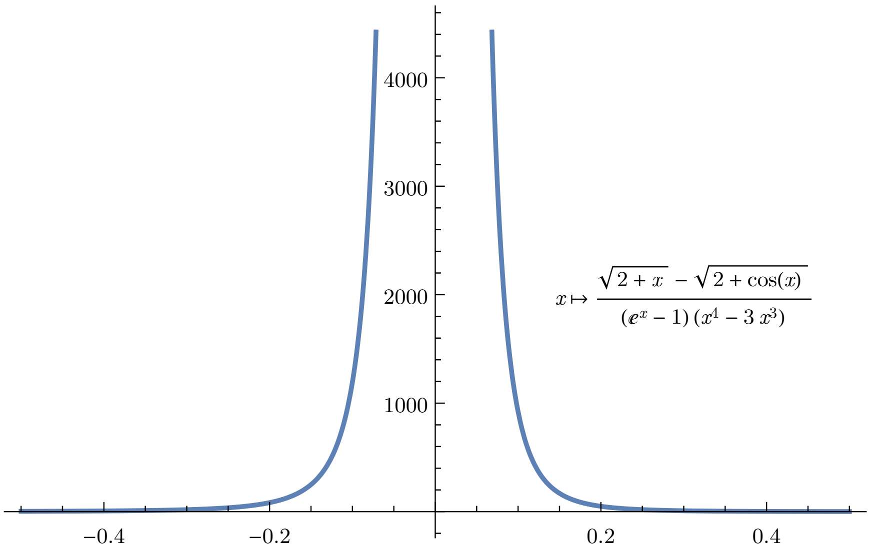
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2+\cos x}}{(e^x-1)(x^4-3x^3)}$$

il numeratore tende a $\sqrt{2}-\sqrt{2+1}$, che è negativo non nullo, mentre entrambi i fattori del denominatore tendono a 0. Pertanto il valore assoluto della funzione tende a $+\infty$. Per capire cosa faccia la funzione originale bisogna trovarne il segno, almeno per gli x vicini a 0. Ma prima conviene semplificare il limite. Il fattore e^x-1 si può moltiplicare e dividere per x in modo da far apparire il nuovo fattore $(e^x-1)/x$, che tende a 1. Il fattore x^4-3x^3 si può scomporre in due fattori, dei quali uno ha limite finito non nullo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2+\cos x}}{(e^x-1)(x^4-3x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2+\cos x}}{x\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot x^3(x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sqrt{2+x}-\sqrt{2+\cos x}}^{\to\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{(x-3)}_{\to -3}}\cdot\frac{1}{x^4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-3}\cdot\frac{1}{0^+}=\frac{\overbrace{\sqrt{2}-\sqrt{3}}^{<0}}{\underbrace{-3}_{<0}}\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Il limite cercato vale $+\infty$.



n. La funzione del limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x-3}\right)^{3x}$$

è una potenza in cui base ed esponente dipendono entrambi da x. L'esponente tende a $+\infty$, mentre la base è una forma indeterminata $+\infty-\infty$. Il termine principale sotto radice è x^2, che raccolto a fattore e portato fuori coincide col primo addendo x. Proviamo a irrazionalizzare, lavorando per ora solo nella base (qui $\sqrt{x^2}=x$ perché $x\to+\infty$):

$$x-\sqrt{x^2-2x-3}=\frac{x^2-(x^2-2x-3)}{x-\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{2x+3}{x+\sqrt{x^2(1-2x^{-1}-3x^{-2})}}=$$

$$=\frac{2x+3}{x+x\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}=\frac{2+3x^{-1}}{1+\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}\longrightarrow\frac{2+0}{1+\sqrt{1-0-0}}=1\,.$$

Poiché la base tende a 1, il limite è nella forma indeterminata $1^{+\infty}$. Un modo di procedere è di riportarsi al limite notevole $(1+\frac{1}{t})^t\to e$ per $t\to+\infty$. A tale scopo aggiungiamo e togliamo 1 nella base e irrazionalizziamo:

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{x^2-2x-3} &= 1+\big(x-\sqrt{x^2-2x-3}-1\big)=1+\big(x-1-\sqrt{x^2-2x-3}\big)=\\
&=1+\frac{(x-1)^2-(x^2-2x-3)}{x-1+\sqrt{x^2-2x-3}}=1+\frac{x^2+1-2x-x^2+2x+3}{x-1+x\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}=\\
&=1+\frac{4}{x-1+x\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}=1+\frac{1}{x\underbrace{\big(1-x^{-1}+\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}\big)/4}_{\to(1+0+\sqrt{1-0-0})/4=1/2}}
\end{aligned}$$

Nel limite ricomposto con l'esponente

$$\lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x-3}\big)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x\big(1-x^{-1}+\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}\big)/4}\Big)^{3x}$$

può venire la tentazione di "sostituire" l'espressione che tende a $1/2$ col suo limite. Questa espressione però non è né un fattore complessivo né un addendo complessivo della funzione. Quindi non abbiamo un teorema che ci autorizzi la sostituzione, anche se in questo singolo caso il risultato finale verrebbe giusto lo stesso. Quindi dobbiamo portarci dietro l'espressione, ma almeno diamole un nome più compatto

$$g(x):=\big(1-x^{-1}+\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}\big)/4.$$

Procediamo con l'idea di far apparire il limite notevole $(1+\frac{1}{t})^t\to e$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x-3}\big)^{3x} &= \lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{xg(x)}\Big)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\Bigg(\overbrace{\Big(1+\frac{1}{xg(x)}\Big)^{xg(x)}}^{\to e}\Bigg)^{\overbrace{3/g(x)}^{\to 3/(1/2)=6}}=\\
&=e^{3/(1/2)}=e^6.
\end{aligned}$$

Abbiamo dato per buono il fatto che se $f(x)\to\ell_1$ e $\varphi(x)\to\ell_2$ allora $f(x)^{\varphi(x)}\to\ell_1^{\ell_2}$ eccetto quando siamo in una forma indeterminata 1^∞ o 0^0 o ∞^0.
Un approccio alternativo al limite di partenza, che conduce a conti quasi uguali, è di riversare la variabilità tutta all'esponente, usando il logaritmo:

$$\big(x-\sqrt{x^2-2x-3}\big)^{3x}=e^{3x\log(x-\sqrt{x^2-2x-3})}=\exp\Big(3x\log\big(x-\sqrt{x^2-2x-3}\big)\Big).$$

Il termine dentro il logaritmo l'abbiamo già studiato prima: tende a 1. Dentro all'esponenziale appare quindi una forma indeterminata $+\infty\cdot\log 1=+\infty\cdot 0$. Per far apparire il limite notevole $\log(1+t)/t\to 1$ per $t\to 0$ si aggiunge e toglie 1 dentro il logaritmo:

$$\begin{aligned}
\log(x-\sqrt{x^2-2x-3}) &= \log\big(1+(x-\sqrt{x^2-2x-3}-1)\big)=\ldots=\\
&=\ldots=\log\Big(1+\frac{4}{x\underbrace{\big(1-x^{-1}+\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}\big)}_{=:h(x)\to 2}}\Big)=\\
&=\log\Big(1+\frac{4}{xh(x)}\Big).
\end{aligned}$$

Tornando al limite complessivo

$$\begin{aligned}
\exp\Big(3x\log\big(x-\sqrt{x^2-2x-3}\big)\Big) &= \exp\Big(3x\log\Big(1+\frac{4}{xh(x)}\Big)\Big)=\exp\Big(3x\frac{\log\big(1+4/(xh(x))\big)}{4/(xh(x))}\cdot\frac{4}{xh(x)}\Big)=\\
&=\exp\Big(\underbrace{\frac{3\cdot 4}{h(x)}}_{\to 2}\cdot\underbrace{\frac{\log\big(1+4/(xh(x))\big)}{4/(xh(x))}}_{\to 1}\Big)\longrightarrow\exp\Big(\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 1\Big)=\exp 6=e^6.
\end{aligned}$$

Alcuni danno la seguente regola per calcolare il limite di $f(x)^{\varphi(x)}$ nel caso 1^∞:

$$\lim f(x)^{\varphi(x)} = \exp\Big(\lim \varphi(x)\big(f(x)-1\big)\Big),$$

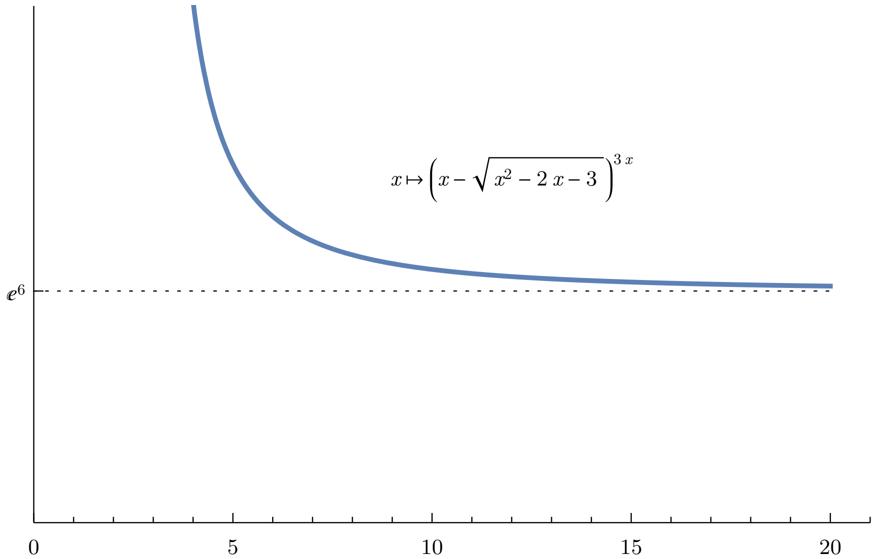
che si può applicare nella nostra situazione. La dimostrazione può andare così:

$$\begin{aligned} f(x)^{\varphi(x)} &= \exp\Big(\varphi(x)\log f(x)\Big) = \exp\Big(\varphi(x)\log\big(1+(f(x)-1)\big)\Big) = \\ &= \exp\Bigg(\varphi(x)\big(f(x)-1\big)\underbrace{\frac{\log\big(1+(f(x)-1)\big)}{f(x)-1}}_{\to 1}\Bigg), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim \varphi(x)^{f(x)} &= \lim\exp\Bigg(\varphi(x)\big(f(x)-1\big)\frac{\log\big(1+(f(x)-1)\big)}{f(x)-1}\Bigg) = \\ &= \exp\lim\Bigg(\varphi(x)\big(f(x)-1\big)\frac{\log\big(1+(f(x)-1)\big)}{f(x)-1}\Bigg) = \exp\lim\Big(\varphi(x)\big(f(x)-1\big)\Big). \end{aligned}$$

E' importante ricordare che l'ultimo passaggio semplificativo vale solo quando $f(x)\to 1$. Non applicarlo in altri casi!



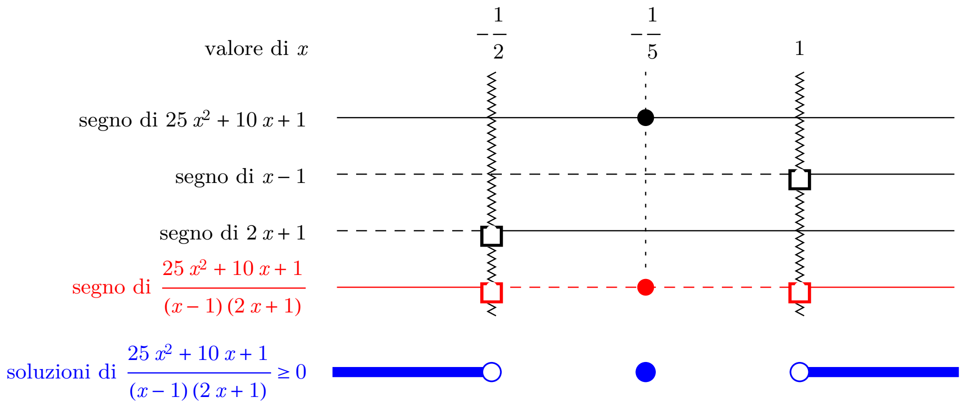
2. a. Nella disequazione

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{4x+1}{8x+4}+\frac{7}{12}\geq 0$$

il primo membro è una somma. Per applicare la regola dei segni dobbiamo riportarci a un prodotto. Facciamo denominatore comune:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1}+\frac{4x+1}{8x+4}+\frac{7}{12} &= \frac{x+1}{x-1}+\frac{4x+1}{4(2x+1)}+\frac{7}{12} = \\ &= 12(2x+1)(x+1)+3(x-1)(4x+1)+7(x-1)(2x+1)12(x-1)(2x+1) = \\ &= \frac{12(2x^2+2x+x+1)+3(4x^2+x-4x-1)+7(2x^2+x-2x-1)}{12(x-1)(2x+1)} = \\ &= \frac{24x^2+36x+12+12x^2-9x-3+14x^2-7x-7}{12(x-1)(2x+1)} = \\ &= \frac{50x^2+20x+2}{12(x-1)(2x+1)}\geq 0 \quad\iff\quad \frac{25x^2+10x+1}{(x-1)(2x+1)}\geq 0 \end{aligned}$$

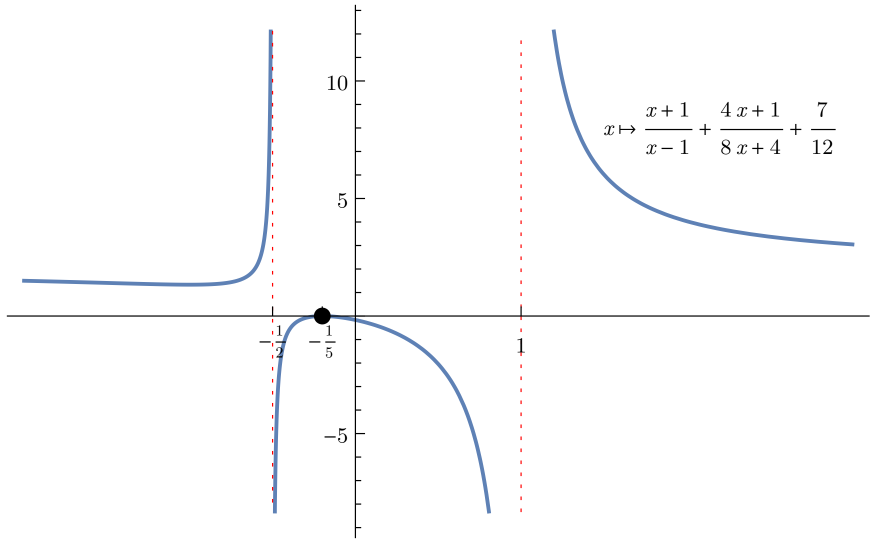
Il denominatore è già scomposto in fattori di primo grado, il cui segno si vede ad occhio. Il numeratore è un polinomio di secondo grado. Per studiarne il segno vediamo prima dove si annulla. Il discriminante ridotto è $\Delta/4 = 5^2-25=0$. Il numeratore ha due radici coincidenti $(-5\pm 0)/25=-1/5$. Pertanto si annulla per $x=-1/5$ ed è >0 altrove. Si può anche riconoscere che è il quadrato perfetto $(5x+1)^2$. Raccogliamo le informazioni sul segno dei vari termini in uno schema:



Si intende che i tratti orizzontali neri o rossi continui significano segno $+$, quelli tratteggiati il segno $-$, i pallini neri significano il segno 0 al numeratore, i quadratini bucati un segno 0 al denominatore, la linea a zigzag verticale segnala punti dove non esiste l'espressione (tipicamente uno zero del denominatore). La riga in basso di colore blu ha un'altro significato: i tratti orizzontali pieni e i pallini pieni vogliono dire soluzioni, i pallini vuoti o i tratti orizzontali bianchi vogliono dire non soluzioni.
Tirando le fila, gli x che rendono ≥ 0 l'espressione sono quelli tali che $x < -1/2 \vee x = -1/5 \vee x > 1$, ossia

$$\frac{25x^2+10x+1}{(x-1)(2x+1)} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -\frac{1}{2} \vee x = -1 \vee x > 1.$$

Complemento. Per chi non si capacitasse della soluzione isolata $x = -1/5$, la figura seguente può essere illuminante: il grafico della funzione $x \mapsto \frac{x+1}{x-1} + \frac{4x+1}{8x+4} + \frac{7}{12}$ è tangente all'asse x proprio nel punto di ascissa $-1/5$, mentre nei punti attorno sta sotto.



b. La disequazione si può ricondurre all'unione di sistemi che non contengono valori assoluti o min:

$$\left|1+\min\{1-2x, x+1\}\right| + x - 2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

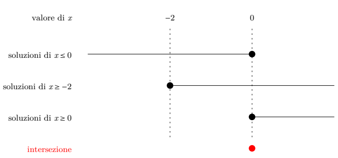
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1-2x \geq x+1 \\ \left|1+(x+1)\right| + x - 2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x < x+1 \\ \left|1+(1-2x)\right| + x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

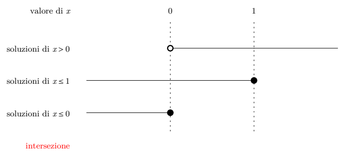
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1-2x \geq x+1 \\ |x+2| + x - 2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x < x+1 \\ |2-2x| + x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

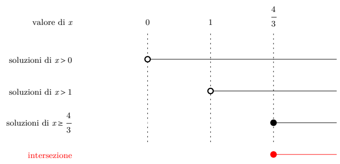
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1-2x \geq x+1 \\ x+2 \geq 0 \\ (x+2) + x - 2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x \geq x+1 \\ x+2 < 0 \\ -(x+2) + x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \vee$$

$$\vee \begin{cases} 1-2x < x+1 \\ 2-2x \geq 0 \\ (2-2x) + x - 2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x < x+1 \\ 2-2x < 0 \\ -(2-2x) + x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\iff \begin{cases} x \le 0 \\ x \ge -2 \\ x \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \le 0 \\ x < -2 \\ -4 \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ x \le 1 \\ x \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x \ge 4/3 \end{cases} \iff$$

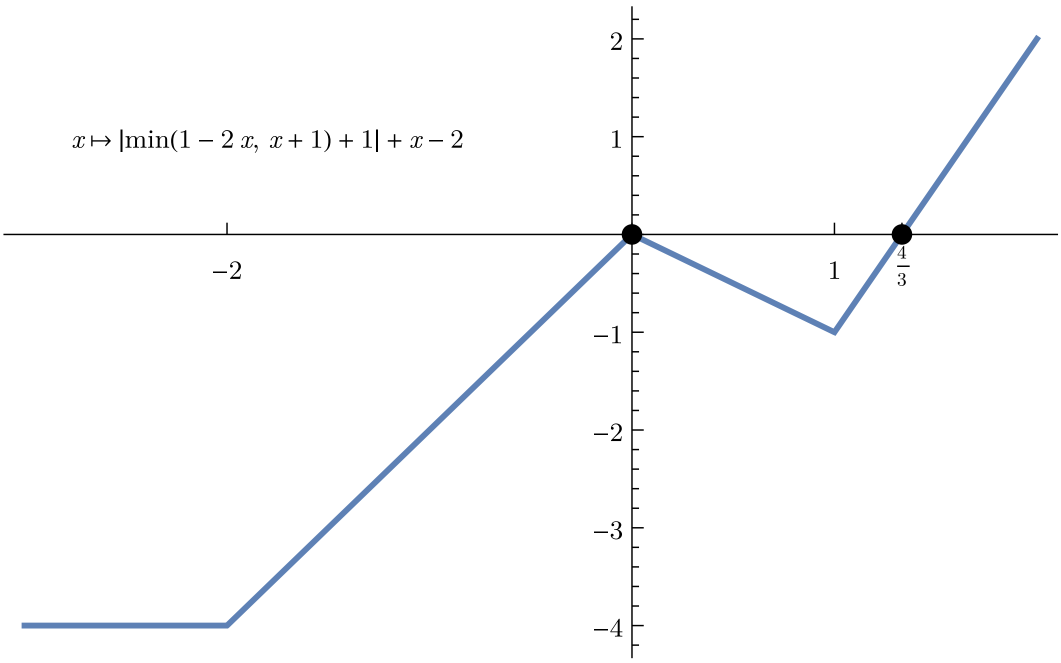






$$\iff \quad x = 0 \vee \text{falso} \vee \text{falso} \vee x \ge \frac{4}{3} \quad \iff \quad x = 0 \vee x \ge \frac{4}{3}\,.$$

Complemento. Un grafico della funzione $x \mapsto |1+\min\{1-2x, x+1\}|+x-2$ può far capire la soluzione isolata $x = 0$: in quel punto la funzione vale 0, mentre nei punti attorno è negativa (il grafico è angoloso).



c. La disequazione $\sqrt{(2x+1)^2(16x+1)} \ge 10x+1$ si presenta nella forma $\sqrt{A} \ge B$, che equivale all'unione di due sistemi che non contengono radicali:

$$\sqrt{(2x+1)^2(16x+1)} \ge 10x+1 \quad \iff$$

$$\iff \begin{cases} (2x+1)^2(16x+1) \ge 0 \\ 10x+1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 10x+1 \ge 0 \\ (2x+1)^2(16x+1) \ge (10x+1)^2 \end{cases} \iff$$

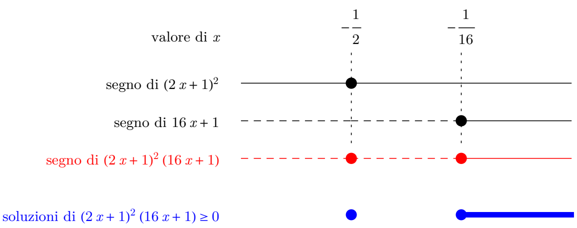
$$\iff \begin{cases} (2x+1)^2(16x+1) \ge 0 \\ x < -1/10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -1/10 \\ (4x^2+4x+1)(16x+1) \ge 100x^2+20x+1 \end{cases} \iff$$

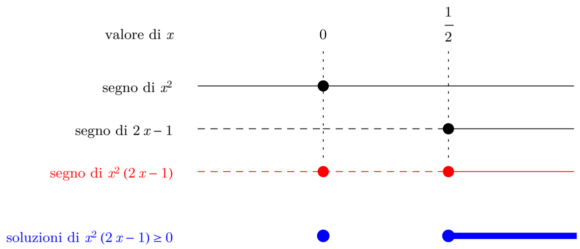
$$\iff \begin{cases} (2x+1)^2(16x+1) \ge 0 \\ x < -1/10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -1/10 \\ 64x^3+4x^2+64x^2+4x+16x+1 \ge 100x^2+20x+1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (2x+1)^2(16x+1) \ge 0 \\ x < -1/10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -1/10 \\ 64x^3-32x^2 \ge 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (2x+1)^2(16x+1) \ge 0 \\ x < -1/10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -1/10 \\ x^2(2x-1) \ge 0. \end{cases}$$

Per risolvere le due disequazioni non banali studiamo il segno:

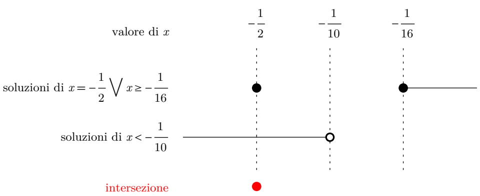


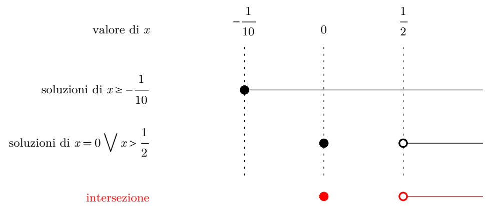


Attenzione: qualcuno sarà tentato di "cancellare i fattori $(2x+1)^2$ e x^2 perché sono positivi". Il ragionamento sarebbe corretto se i fattori fossero > 0, ma nel nostro caso i fattori sono soltanto ≥ 0, e cancellare i fattori fa perdere soluzioni. Tornando ai nostri sistemi:

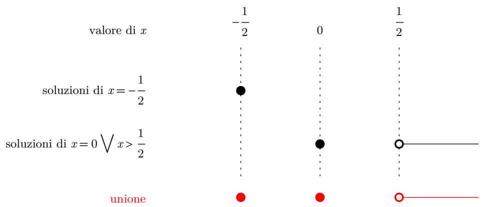
$$\begin{cases} (2x+1)^2(16x+1) \geq 0 \\ x < -1/10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1/10 \\ x^2(2x-1) \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = -1/2 \vee x \geq -1/16 \\ x < -1/10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -1/10 \\ x = 0 \vee x > 1/2 \end{cases} \iff$$



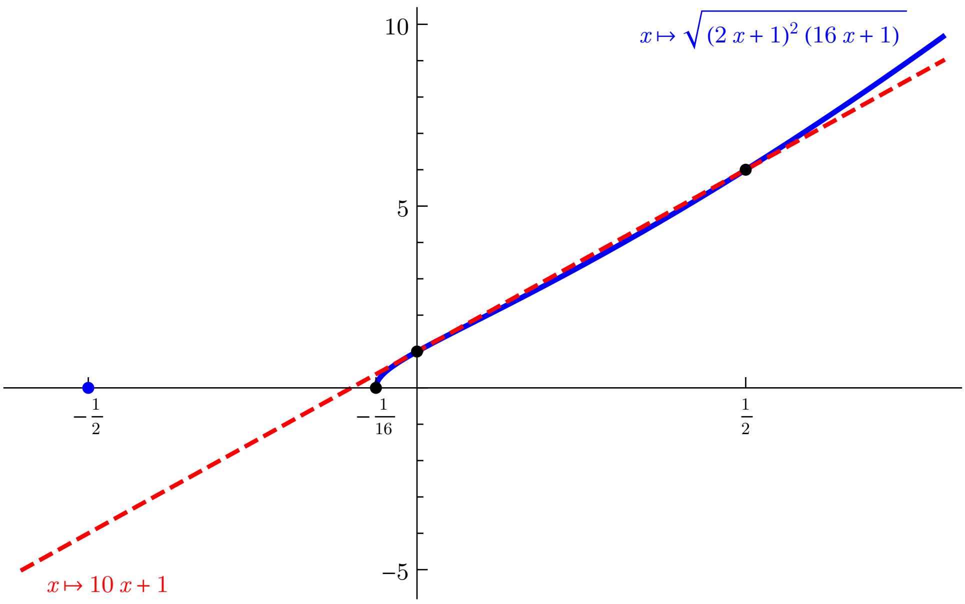


$$\iff \Big(x = -1/2 \quad \vee \quad \big(x = 0 \vee x \geq 1/2\big)\Big) \iff$$

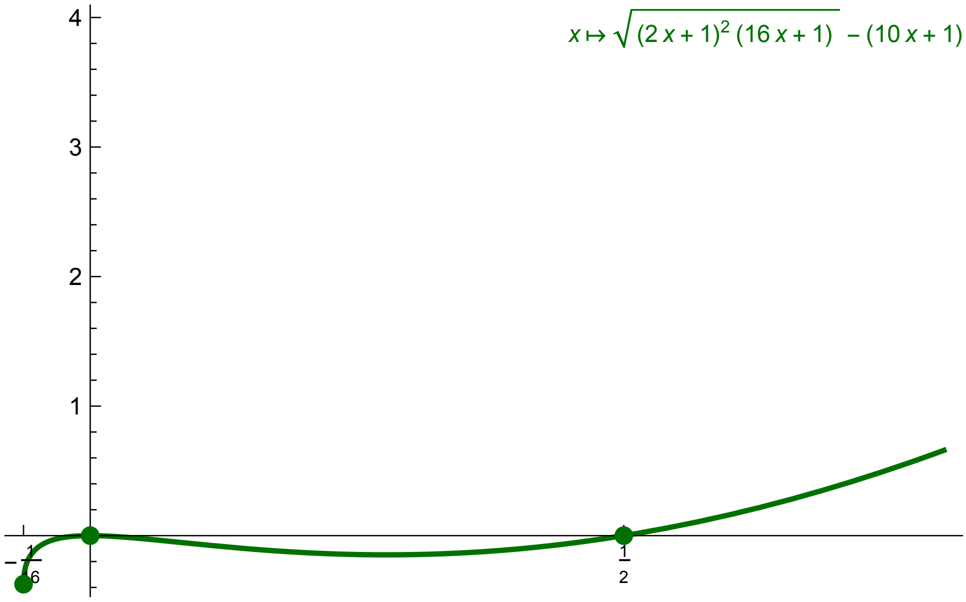


$$\iff \quad x = -1/2 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Complemento. Per capacitarsi delle due soluzioni isolate $-1/2$ e 0 forse può aiutare un grafico delle due funzioni $x \mapsto (2x+1)^2(16x+1)$ (in blu) e $x \mapsto 10x+1$ (in rosso):



La soluzione $x = -1/2$ è dovuta al fatto che il grafico della funzione $x \mapsto \sqrt{(2x+1)^2(16x+1)}$ ha un punto isolato (-1/2,0), che sta sopra il grafico di $x \mapsto 10x+1$. La soluzione $x = 0$ corrisponde a un punto di tangenza dei due grafici, attorno al quale la funzione in rosso sta sopra. Nel punto di ascissa $x = 1/2$ la funzione in blu attraversa quella in rosso e a destra sta sopra. Purtroppo nella regione che interessa le due funzioni sono molto vicine fra loro, e i grafici sono quasi sovrapposti. Nel grafico seguente in verde cè il grafico della funzione differenza $x \mapsto \sqrt{(2x+1)^2(16x+1)} - (10x+1)$, nella quale si distingue forse più chiaramente dove è ≥ 0.



3. Il predicato $\mathcal{P}(n)$ da dimostrare è

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n n\,.$$

Il caso base $\mathcal{P}(1)$ è

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(n)\\
&\Updownarrow \quad \text{(definizione)}\\
&\Big(-\frac{1}{2}\Big)^1(6\cdot 1-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^1\cdot 1\\
&\Updownarrow \quad \text{(semplificazione)}\\
&-\frac{1}{2}\cdot 2 = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)\\
&\Updownarrow \quad \text{(semplificazione)}\\
&-1=-1\\
&\Updownarrow \quad \text{(costatazione)}\\
&\text{vero.}
\end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vero. Per il passo induttivo, scriviamo per disteso $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+1}(n+1)\,.$$

e confrontiamolo con $\mathcal{P}(n)$ già scritto. Notiamo che il primo membro di $\mathcal{P}(n+1)$ si ottiene dal primo membro di $\mathcal{P}(n)$ aggiungendo l'addendo corrispondente a $k = n+1$. Aggiungiamo pertanto tale addendo ad ambo i membri di $\mathcal{P}(n)$ nella speranza che l'uguaglianza risultante sia proprio $\mathcal{P}(n+1)$, eventualmente dopo qualche manipolazione algebrica:

$$\mathcal{P}(n)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(definizione)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n n$$

$$\Updownarrow \quad \text{(sommiamo l'addendo ad ambo i membri)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+1}(6(n+1)-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n n + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+1}(6(n+1)-4)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(compattiamo la somma al primo membro)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n n + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+1}(6n+2)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(raccogliamo } (-1/2)^n \text{ al secondo membro)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n \Big(2n - \frac{1}{2}(6n+2)\Big)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(semplifichiamo al secondo membro)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n (2n-3n-1)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(semplifichiamo al secondo membro)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n (-n-1)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(facciamo comparire un ulteriore } -1/2)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n 2(n+1)\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(raccogliamo i fattori } -1/2)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k(6k-4) = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n+1}(n+1)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(costatazione)}$$

$$\mathcal{P}(n+1).$$

Questi passaggi sono tutti reversibili ($\Updownarrow$), ma nella dimostrazione per induzione ci basta l'implicazione semplice $\Downarrow$. Il passo induttivo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ è verificato.

4. Dimostrare che 0 è il massimo dell'insieme $X = \big\{2|n|/(2n-4|n|+1) \;:\; n \in \mathbb{Z}\big\}$ significa dimostrare che 0 è maggiorante dell'insieme, cioè che le soluzioni della disequazione $2|n|/(2n-4|n|+1) \leq 0$ comprendono tutti gli $n \in \mathbb{Z}$, e inoltre che 0 è elemento dell'insieme, cioè che l'equazione $2|n|/(2n-4|n|+1) = 0$ è soddisfatta per almeno per un $n \in \mathbb{Z}$. Cominciamo dall'equazione, che sembra più facile:

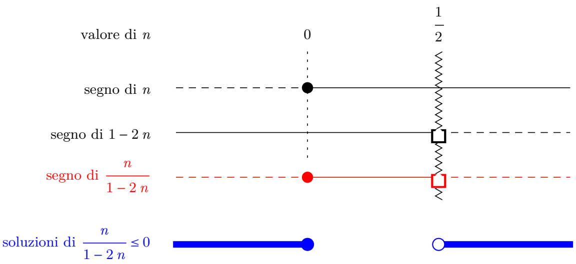
$$\frac{2|n|}{2n-4|n|+1} = 0 \iff \begin{cases} 2|n| = 0 \\ 2n-4|n|+1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 0 \\ 2n-4|n|+1 \neq 0 \end{cases} \iff$$

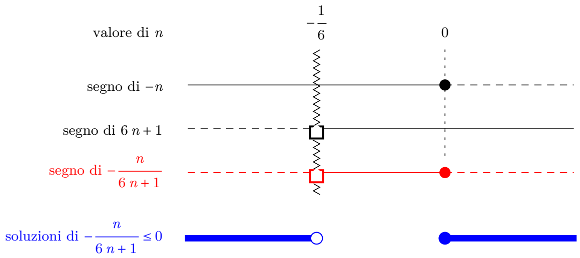
$$\iff \begin{cases} n = 0 \\ 2\cdot 0 - 4|0| + 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 0 \\ \text{vero} \end{cases} \iff n = 0.$$

L'uguaglianza vale pertanto per $n = 0 \in \mathbb{Z}$, e pertanto 0 è elemento dell'insieme. Passiamo alla disuguaglianza, che contiene un valore assoluto:

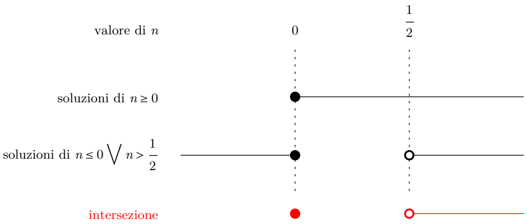
$$\frac{2|n|}{2n-4|n|+1} \leq 0 \iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{2n}{2n-4n+1} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{2(-n)}{2n-4(-n)+1} \leq 0 \end{cases} \iff$$

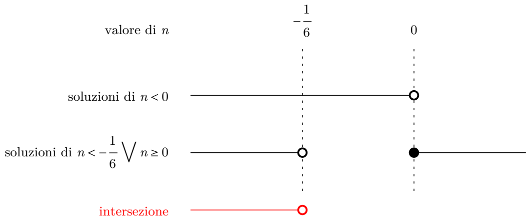
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{n}{1-2n} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{-n}{6n+1} \leq 0 \end{cases} \iff$$



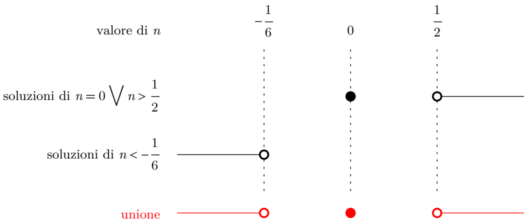


$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n \leq 0 \vee n > \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n < -\dfrac{1}{6} \vee n \geq 0 \end{cases} \iff$$





$$\iff \left(n = 0 \vee n > \frac{1}{2}\right) \vee \left(n < -\frac{1}{6}\right) \iff$$



$$\iff \quad n < -\frac{1}{6} \vee n = 0 \vee n > \frac{1}{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione non comprendono tutti i reali, ma contengono tutti gli interi $n \in \mathbb{Z}$, che è quello che ci serve. Quindi 0 è un maggiorante dell'insieme.
Dimostrare che -2 è il minimo dell'insieme $X = \{2|n|/(2n-4|n|+1) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ significa dimostrare che -2 è minorante dell'insieme, cioè che le soluzioni della disequazione $2|n|/(2n-4|n|+1) \geq -2$ comprendono tutti gli $n \in \mathbb{Z}$, e inoltre che -2 è elemento dell'insieme, cioè che l'equazione $2|n|/(2n-4|n|+1) = -2$ è soddisfatta per almeno per un $n \in \mathbb{Z}$. Cominciamo dall'equazione:

$$\frac{2|n|}{2n-4|n|+1} = -2 \iff \frac{2|n| + 2(2n-4|n|+1)}{2n-4|n|+1} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{4n-6|n|+2}{2n-4|n|+1} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4n-6n+2}{2n-4n+1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{4n-6(-n)+2}{2n-4(-n)+1} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{-2n+2}{-2n+1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{10n+2}{6n+1} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n = -1/5 \end{cases} \iff n = 1 \vee n = -1/5.$$

La soluzione $n = -1/5$ non è in $\mathbb{Z}$, ma la $n = 1$ sì. Quindi -2 appartiene all'insieme. Passiamo a verificare che -2 è un minorante. I primi passaggi

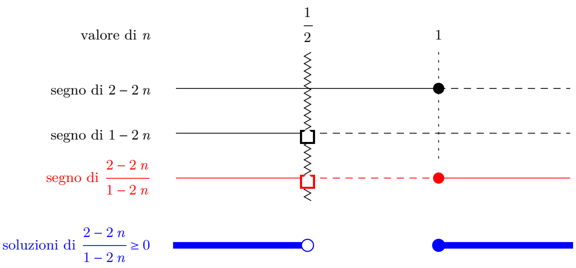
n	$\dfrac{2\|n\|}{2n-4\|n\|+1}$
-10	-0.3390
-9	-0.3396
-8	-0.3404
-7	-0.3415
-6	-0.3429
-5	-0.3448
-4	-0.3478
-3	-0.3529
-2	-0.3636
-1	-0.4000
0	0.0000
1	-2.0000
2	-1.3333
3	-1.2000
4	-1.1429
5	-1.1111
6	-1.0909
7	-1.0769
8	-1.0667
9	-1.0588
10	-1.0526

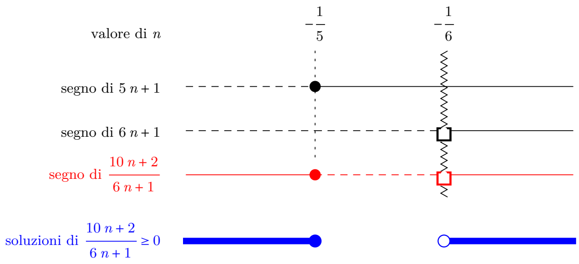
sono quasi identici a quelli precedenti, semplicemente con dei segni $\geq$ al posto di $=$:

$$\frac{2|n|}{2n-4|n|+1} \geq -2 \iff \frac{2|n|+2(2n-4|n|+1)}{2n-4|n|+1} \geq 0 \iff \frac{4n-6|n|+2}{2n-4|n|+1} \geq 0 \iff$$

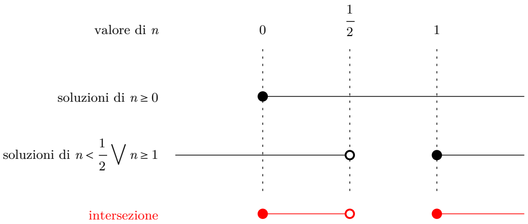
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{4n-6n+2}{2n-4n+1} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{4n-6(-n)+2}{2n-4(-n)+1} \geq 0 \end{cases} \iff$$

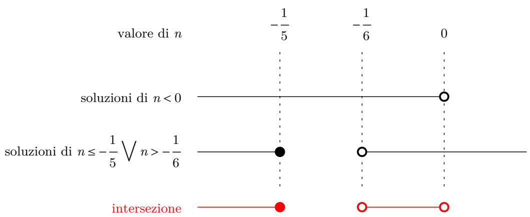
$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ \dfrac{2-2n}{1-2n} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ \dfrac{10n+2}{6n+1} \geq 0 \end{cases} \iff$$



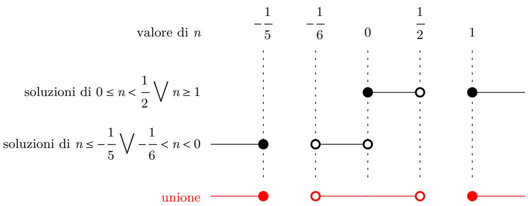


$$\iff \begin{cases} n \geq 0 \\ n < \dfrac{1}{2} \vee n \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} n < 0 \\ n \leq -\dfrac{1}{5} \vee x > -\dfrac{1}{6} \end{cases} \iff$$





$$\iff \left(0 \leq n < \frac{1}{2} \vee n \geq 1\right) \vee \left(n \leq -\frac{1}{5} \vee -\frac{1}{6} < n < 0\right) \iff$$



$$\iff \quad n \leq -\frac{1}{5} \vee -\frac{1}{6} < n < \frac{1}{2} \vee n \geq 1$$

$$\Uparrow$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Effettivamente la disuguaglianza $2|n|/(2n-4|n|+1) \geq -2$ è verificata per tutti gli n interi. Quindi -2 è un minorante.

È un fatto generale che quando un insieme di numeri reali ha massimo, allora l'estremo superiore coincide col massimo; quando l'insieme ha minimo, l'estremo inferiore coincide col minimo. Quindi non sono necessari ulteriori calcoli per concludere che 0 è l'estremo superiore di X, e -2 è l'estremo inferiore.

Ci si può chiedere se il calcolo (che è agevole) del limite per $n \to \pm\infty$ di $2|n|/(2n-4|n|+1)$ possa aiutare per trovare gli estremi di X. Vediamo:

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{2|n|}{2n-4|n|+1} = \lim_{n\to-\infty} \frac{-2n}{6n+1} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2|n|}{2n-4|n|+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{-2n+1} = -1.$$

Avremmo ricavato l'informazione che $\inf X \leq -1 < -1/3 \leq \sup X$, che è vera ma di scarsa utilità ai nostri fini.

Complemento. La struttura dell'insieme X: